

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

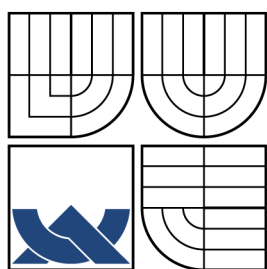
ROZŠÍŘENÁ KVADRATICKY OPTIMÁLNÍ IDENTIFIKACE A FILTRACE

DIZERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

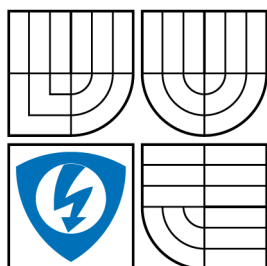
AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. JAKUB DOKOUPIL

BRNO 2012



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY  
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY



FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND  
COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

## ROZŠÍŘENÁ KVADRATICKY OPTIMÁLNÍ IDENTIFIKACE A FILTRACE

QUADRATICALLY OPTIMAL AUGMENTED IDENTIFICATION AND FILTRATION

DIZERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. JAKUB DOKOUPIL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Ing. PETR PIVOŇKA, CSc.

BRNO 2012

## ABSTRAKT

Souběžné vyhodnocování souboru modelů různých řádů a schopnost sledovat nemodelované změny v parametrech je často žádoucím prvkem v úlohách parametrické estimace. Vhodným nástrojem umožňujícím řešení problému paralelní identifikace je technika pracující s faktory rozšířené kovarianční (ACM) popř. informační matice (AIM). Odtud je odvozen název rozšířená identifikace (AI) metodou nejmenších čtverců. Metoda AI tak zachovává numerickou stabilitu výpočtu konvenční metody nejmenších čtverců, avšak mnohem efektivněji vyhodnocuje informační obsažnost dat. Pro účely sledování časového vývoje parametrů lze využít, že veškeré informace vztahující se k rekurzivní identifikaci, a tím i k datově řízenému zapomínání, jsou koncentrovány přímo v ACM a stejně tak i v AIM. V práci bude uveden postup, jak ocenit přínos dat a zapomínat pouze tu část informace uložené v ACM (AIM), která bude modifikována nejnovějšími daty nesenými regresorem.

V úlohách estimace vystupuje i praktická potřeba znalosti vnitřních stavů identifikovaného systému. Protože rozšířená identifikace spadá do třídy metod minimalizujících chybu predikce (PEM), vyvstává racionální požadavek na formulaci stavového filtru jako optimalizační procedury, která minimalizuje chybu predikovanou stavovým modelem s ohledem na působení vektoru stavů. Navržené schéma stavového filtru doplní okruh metod pracujících s ACM (AIM) o přístup rozšířené filtrace (AF). Tímto bude položen ucelený koncept parametrické estimace, který se v porovnání s konvenčními přístupy vyznačuje všestranností, nízkými nároky kladenými na apriorní znalost procesu a jedinečnými numerickými vlastnostmi (odolný vůči přeparametrizování, řešící mnohamodelový problém).

## KLÍČOVÁ SLOVA

adaptivní estimace, rozšířená identifikace (AI), rozšířená filtrace stavů (AF), selektivní zapomínání, metoda nejmenších čtverců, mnohamodelová rekurzivní identifikace

## ABSTRACT

Simultaneous evaluation of the whole set of the model parameters of different orders together with an ability to track unmodeled dynamics are desired features in the tasks of parameter estimation. A technique handling with the factors produced by an augmented covariance (ACM) or information (AIM) matrices is considered to be an appropriate tool for designing multiple model estimation. This is where the name augmented identification (AI) by using the least-squares method was taken. The method AI attains numerical stability of the calculation of the conventional least squares method while in the same time, fully extracts information contained in the observation. In order to track time varying parameters can be found that all the information pertinent to recursive identification and thus to data driven forgetting is concentrated in ACM as well as in AIM. In this thesis will be introduced how to selective forgetting to ACM should be applied in an effective way. It means forget only a portion of accumulated information which will be further modified by the newest data included in the regressor.

In the estimation problems the knowledge of the inner states of the identified system is often required. Because the augmented identification belongs within the class so called prediction error method (PEM), some rational requirements can be deduced. As a result, state filter should constitute optimization procedure minimizing the predicted error of given state space model representation with respect to the vector of states. The proposed scheme will considerably extend the family of algorithms based on processing of ACM (AIM) about augmented filtering (AF). This all will establish a comprehensive concept of parametric estimation that compared with conventional approaches is characterized by versatility, low demands on a priori process information and by excellent numerical properties (robust against overparametrization, capable solving the multiple model problem).

## KEYWORDS

adaptive estimation, augmented identification (AI), augmented state filtering (AF), selective forgetting, least-squares method, multiple model recursive identification

DOKOUPIL, Jakub *Rozšířená kvadraticky optimální identifikace a filtrace*: dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2012. 110 s. Vedoucí práce byl prof. Ing. Petr Pivoňka, CSc.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Rozšířená kvadraticky optimální identifikace a filtrace“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené doktorské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této doktorské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

(podpis autora)

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu dizertační práce panu prof. Ing. Petrovi Pivoňkovi, CSc. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno .....

.....

(podpis autora)

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>9</b>
1.1 Cíle dizertační práce . . . . .	12
<b>2 Současný stav</b>	<b>13</b>
2.1 Estimace časově variantního procesu . . . . .	13
2.2 Mnohamodelová metoda nejmenších čtverců . . . . .	29
2.3 Shrnutí kapitoly . . . . .	34
<b>3 Rozšířená adaptivní identifikace a filtrace metodou nejmenších čtverců</b>	<b>36</b>
3.1 Úvod . . . . .	37
3.2 Rozšířená identifikace a filtrace v dávkovém režimu učení . . . . .	40
3.2.1 Rozšířená identifikace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	41
3.2.2 Rozšířená filtrace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	44
3.2.3 Minimalizace kvadratické formy s využitím $LDL^T$ produktů rozšířené informační matice . . . . .	49
3.2.4 Minimalizace kvadratické formy s využitím Choleského produktů rozšířené informační matice . . . . .	54
3.3 Rozšířená identifikace a filtrace v rekurzivním režimu učení . . . . .	59
3.3.1 Rozšířená identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	60
3.3.2 LD filtrace rekurzivní metody nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	62
3.3.3 Rozšířená UD identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	64
3.3.4 Odmocninová filtrace rekurzivní metody nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	66

3.3.5	Rozšířená odmocninová identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	67
3.3.6	Rozšířená filtrace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním . . . . .	70
3.4	Rozšířená identifikace jako forma mnohamodelové estimace a její numerické aspekty . . . . .	74
3.5	Modely s chybou rovnice . . . . .	81
3.6	Selektivní zapomínání pro mnohamodelovou identifikaci . . . . .	84
3.7	Shrnutí kapitoly . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Komentované výsledky simulací</b>	<b>94</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>100</b>
	<b>Literatura</b>	<b>103</b>
	<b>Seznam symbolů, veličin a zkratk</b>	<b>107</b>



# Seznam obrázků

4.1	Průběh konvergence parametrů modelu (4.1) s využitím metody EF-AUDI-RLS. V kontextu tohoto grafu vektory $\hat{\theta}_k$ a $\theta_k$ zastupují odhady a skutečné hodnoty parametrů modelu. . . . .	95
4.2	Průběh konvergence vnitřních stavů modelu (4.1) s využitím metody EF-AUDF-RLS. Přerušovaná čára zachycuje skutečný vývoj stavů a vyznačené body pak jejich odhady v příslušných okamžicích. . . . .	96
4.3	Signál vstupující do procesu (horní graf) a tomu odpovídající výstupní odezva (dolní graf). . . . .	97
4.4	Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání $\text{REFC}$ . . . . .	98
4.5	Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání $\text{REFM}$ . . . . .	98
4.6	Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání $\text{RMEFR}$ . . . . .	99
4.7	Průběh sledování parametrů s technikou klasického exponenciálního zapomínání EF. . . . .	99

# Kapitola 1

## Úvod

V mnohých aktivitách lidské činnosti představuje schopnost porozumět, předpovídat, ovlivnit budoucí vývoj rozličných jevů zcela zásadní a klíčový element. Za tímto účelem člověk vytváří matematické modely těchto jevů (procesů). Působením vnějších vlivů na proces dochází současně se změnou výstupního chování k transformaci jeho vnitřních, obvykle skrytých podmínek (dále stavů). Pro možnost snadnější kontroly a porozumění fungování procesu je žádoucí tyto vnitřní stavy s využitím znalosti modelu procesu a pozorováním jeho chování rekonstruovat. Ucelená metodika zabývající se extrakcí informačního obsahu signálů generovaných procesem, při zpravidla známém buzení, představuje vědní oblast nazývanou procesní identifikace a filtrace. Identifikaci interpretujeme jako požadavek nalezení matematické relace mezi vstupy a výstupy. Relací v tomto případě rozumíme to, co nazýváme modelem. Potom pojmem filtrace budeme označovat úlohu rekonstrukce vnitřních stavů procesu při známé vstupně výstupní relaci. Je zřejmé, že úlohy identifikace a filtrace jsou matematicky rovnocenné a souhrnně zastupují problém estimace parametrů. Účelem estimace je nalezení nejlepší reprezentace zkoumaného procesu s ohledem na strukturní omezení modelu a funkční význam parametrů (stavů) v něm vystupujících vzhledem ke zvolené kritériální funkci.

V následujícím textu se omezíme na modely dynamických systémů, které sehrávají klíčovou úlohu v technických vědách, v úlohách automatického řízení a v celé řadě dalších inženýrských disciplín. Tato práce je věnována návrhu efektivních a numericky spolehlivých metod umožňujících získání chybějící informace o chování procesu přístupem nejmenších čtverců.

Metody nejmenších čtverců jsou dominantním nástrojem pro účely parametrické estimace již několik desetiletí v důsledku své snadné implementovatelnosti a teoretické komplexnosti. Formulace konvenční metody nejmenších čtverců má však některé nedostatky. Prvním z nich je problém s numerickou realizovatelností v případech, kdy kovarianční matice je numericky špatně podmíněná nebo singulární,

zejména pak v důsledku přeparametrizování. V takových případech regresní matice dat může obsahovat lineárně závislé sloupce a poloha optimálního odhadu (ve smyslu kritéria) pak nemusí být jednoznačná. Dalším obvykle opomíjeným problémem je otázka využitelnosti informace dostupné z měřených dat. V pracích [28, 30] je dokázáno, že konvenční metody nejmenších čtverců plně neextrahují užitečnou informaci obsaženou v pozorování.

Řešení prvního problému je umožněno začleněním techniky singulárního rozkladu matice (SVD) [44], která pak degraduje model, v případě že regresní matice dat nemá plnou sloupcovou hodnotu, na přípustný řád. Obecně navýšení přesnosti výpočtu kovarianční matice, ne však nutně odhadu, zajistíme aplikací některé z technik filtrace kovarianční matice. Algoritmus pak nepracuje přímo s kovarianční maticí, ale zajišťuje šíření pouze určitých částí této matice a to tak, aby zůstala zachována původní matematická reprezentace matice. Mezi preferované a často využívané techniky umožňující filtraci kovarianční matice, vyjma SVD rozkladu patří symetrická  $LDL^T/UDU^T$  [3] a Choleského faktorizace [39], Potterova odmocninová filtrace [9, 35] a QR faktorizace [32].

Druhý problém ukazuje na skutečnost, že konvenční metody nejmenších čtverců produkují odhad modelu pouze nejvyššího řádu, zatímco informace koncentrovaná v rozšířené informační matici (AIM  $\mathcal{M}_k$ ) umožňuje současný odhad modelů všech řádů [28]. Spolu s odhady modelů všech řádů lze z matice rovněž vyčíslit hodnoty kritériálních funkcí, které odpovídají těmto modelům. Všechny tyto teoretické možnosti estimace v sobě slučuje mnohamodelová identifikace metodou nejmenších čtverců (MMLS) [28, 30, 31], která využívá principu rozšířené identifikace (AI), tj. pracuje přímo s rozšířenou informační (AIM  $\mathcal{M}_k$ ) nebo kovarianční (ACM  $\mathcal{C}_k$ ) maticí. Výhodou je, že získání těchto přídavných procesních informací, na rozdíl od paralelního běhu několika algoritmů, nepředstavuje dodatečnou výpočetní zátěž. Postup rekurentní aktualizace ACM  $\mathcal{C}_k$  je analogický k obnově konvenční kovarianční matice. Jediným rozdílem je konstrukce a uspořádání regresního vektoru, který je pro ACM  $\mathcal{C}_k$  navíc rozšířen o měřený výstup. V důsledku této skutečnosti, může být do výpočtu ACM  $\mathcal{C}_k$  zahrnuta některá z robustních technik faktorizace vylepšující numerické vlastnosti. Vhodnou reformulací problému pak produkované faktory ACM  $\mathcal{C}_k$  přímo zprostředkovávají odečitatelné hodnoty parametrů a kritériálních funkcí od prvního až po nejvyšší řád modelu. Metoda tak zachovává numerickou spolehlivost faktorizované metody nejmenších čtverců a současně poskytuje kompletnost informace pro účely identifikace ve všestranné a kompaktní formě.

Praktické aplikace se obvykle vyznačují časovou nestálostí svých dynamických vlastností. Jestliže tato změna není explicitně zahrnuta do vývoje modelu, jsou jednotlivá pozorování v průběhu výpočtu znehodnocována v důsledku nekorektně postihnuté dynamiky procesu. Za předpokladu, že máme k dispozici kompletní sto-

chastický popis struktury a časových změn chování procesu a tyto mají Gaussovský charakter, poskytuje optimální strategii sledování parametrů (ve smyslu střední kvadratické chyby odhadu) Kalmanův filtr. Později budeme označovat zapomínání zprostředkované Kalmanovým filtrem, modelujeme-li vývoj parametrů ve tvaru náhodné procházky, jako lineární zapomínání. Často nedostačující apriorní informace o chování procesu znemožňuje sestavit skutečný, byť stochastický model vývoje parametrů, který je vyžadován optimálním filtrem. V takovém případě neznalost vývoje parametrů kompenzujeme schopností algoritmu se adaptovat. Pro zajištění adaptivity identifikace využíváme některou z technik zapomínání zvyšující neurčitost parametrů. Tyto heuristické přístupy, přestože uvažují pouze zjednodušený model vývoje parametrů, se vyznačují dobrou sledovací schopností. Abychom implementovali zapomínání efektivním způsobem, musíme nalézt kompromis mezi potlačováním rušivé složky a variabilitou algoritmu. Další obtížností vyvstávající v důsledku konstantního zapomínání je možnost neomezeného růstu korekčního zesílení algoritmu. K tomu dochází v případech, kdy rovnoměrně zapomínáme starou informaci, která není vhodně nahrazována informací nově příchozí.

V dizertační práci bude uveden a rozvíjen koncept rozšířené identifikace, jako vhodného nástroje pro sledování časových změn procesních parametrů pro praktické situace. Analýzou struktury rozšířené identifikace poskytneme detailní vhled na fungování mechanismu zapomínání, který povede na sestavení nového principu selektivního zapomínání řízeného informačním obsahem dat. V rámci práce bude rovněž předvedeno, že struktura rozšířené identifikace (filtrace) je přenositelná na problém kvadraticky optimální filtrace. Třída metod založených na minimalizaci chyby predikce (PEM) [24, 27, 38] tak bude nově rozšířena i na aplikace stavové rekonstrukce. Navržený stavový filtr bude umožňovat optimální odhad stavů obecného vstupně výstupního lineárního modelu v dávkovém i rekurzivním režimu a bude schopen kompenzovat nepřesnost vlastního modelu technikou exponenciálního zapomínání. Tento vývoj byl motivován skutečností, že obvykle jedinou dostupnou a ověřitelnou informací vypovídající o vlastnostech procesu, jsou měřená data.

Uspořádání práce je následující: kapitola 2 v přehledu recenzuje konvenční přístupy rekurzivních metod nejmenších čtverců s důrazem na požadavek sledování časového vývoje parametrů, bude zde nalezen prvek vzájemně propojující některé varianty směrového zapomínání a současně zde bude diskutován alternativní přístup k exponenciálnímu zapomínání upravující rychlost konvergence zvláště pro každý z parametrů. Následuje kapitola 3 tvořící jádro celé práce. V této kapitole bude detailně rozveden problém parametrické estimace přístupem rozšířené identifikace a filtrace postavené na struktuře vstupně výstupních modelů s chybou rovnice [27, 43], jmenovitě na modelech ARX, ARMAX, ARARMAX. Bude ukázáno, že v případě modelů tohoto typu, rozšířená identifikace přirozeně vede na mnohamodelovou pa-

ralelní estimaci. Poté bude řešena problematika omezeného exponenciálního zapomínání, která ve spojení s rozšířenou identifikací zavádí ryzí formu kategorizace veškeré akumulované informace na informativní a neinformativní část. V kapitole 4 budou demonstrovány vlastnosti navržených přístupů na příkladech simulací na matematických modelech. Celou práci uzavírá závěr v kapitole 5.

## 1.1 Cíle dizertační práce

V úvodu dizertační práce byly pojmenovány některé doposud nevyřešené otázky vystupující v praktických úlohách adaptivní estimace. Stěžejním tématem práce je podat řešení zejména těchto specifických problémů:

1. Analyticky odvodit metodu nejmenších čtverců umožňující ocenit rozdílnou rychlost vývoje parametrů exkluzivní hodnotou faktoru zapomínání a výsledek diskutovat s ohledem na dostupná řešení.
2. Nalézt vzájemně propojující faktor některých zdánlivě nesourodých metod směrového zapomínání a současně poskytnout řešení směrového zapomínání pro případ, kdy metoda pracuje s maticí exponenciálních faktorů.
3. Vyšetřit vlastnosti rozšířené identifikace jako problému mnohamodelové estimace s ohledem na omezující podmínky vystupující v kritériální funkci, které jsou nezbytné pro zajištění existence (zejména) rekursivního řešení.
4. Vyvinout stavový filtr jako optimalizační proceduru minimalizující chybu predikce obecného lineárního časově variantního stavového modelu s ohledem na působení vektoru stavů, a to bez nutnosti znalostí stochastických složek procesu. Metoda filtrace bude využívat akumulované procesní informace obsažené v rozšířené kovarianční matici.
5. Vyvinout techniku selektivního zapomínání pro přístup mnohamodelové identifikace tak, aby si metoda uchovala své výhodné vlastnosti (odolnost vůči přeparametrizování, kompaktnost řešení) a současně zde existovala provázanost s původním optimalizačním problémem, tj. kritériální funkcí.
6. Protože veškeré úsilí vynaložené na vývoj metod by bez možnosti efektivní implementace bylo zbytečné, budou vyvinuty UD a odmocninové filtry postavené na vhodném ortogonalizačním procesu umožňujícím přímé řešení rekurentní obnovy rozšířené kovarianční i informační matice.

# Kapitola 2

## Současný stav

Problematika sledování časového vývoje proměnné dynamiky procesu sehrává klíčovou úlohu v návrhu adaptivních systémů a v aplikacích pro zpracování signálu. Do současnosti byla vyvinuta celá řada matematických přístupů řešících tematickou oblast adaptivní estimace. V této kapitole budou diskutovány některé známé a možné modifikace rekurzivních metod nejmenších čtverců (RLS), a to jak v kontextu odhadování parametrů modelu, tak i v kontextu stavového pozorovatele. V závěru kapitoly bude stručně popsán princip mnohamodelové identifikace metodou nejmenších čtverců (MMLS) využívající koncepci rozšířené identifikace (AI) jako pokročilejší alternativy ke konvenční formulaci metody nejmenších čtverců (LS).

### 2.1 Estimace časově variantního procesu

Fundamentální analýzou technik umožňujících adaptivní estimaci parametrů lze v základě jednotlivé metody dělit na metody s relativním a absolutním zapomínáním [29].

Do kategorie relativního zapomínání spadá technika exponenciálního zapomínání (EF), kdy je znehodnocena vždy pouze relativní část (normalizované) informační matice přímo úměrně s faktorem zapomínání. Rekurzivní metoda nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním (EF-RLS) [24, 38] je obvykle spojována s jednoduchým modelem vývoje parametrů (vlastně stavů) a rovnicí výstupu ve tvaru lineární regrese

$$\theta_{k+1} = \theta_k \tag{2.1}$$

$$y_k = h_k^T \theta_k + e_k \tag{2.2}$$

kde  $h_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  je regresní vektor pozorování v časovém okamžiku  $k$ ,  $\theta_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  je vektor parametrů modelu,  $e_k$  je šum měření mající vlastnosti  $e_k \sim N(0; \sigma_e^2)$  a  $y_k$  je hodnota výstupu generovaná modelem.

Techniku šíření (normalizované) kovarianční matice a odhadovaných parametrů pak lze formulovat ve dvou krocích: aktualizace v datovém a v časovém kroku výpočtu [14]. Rovnice popisující datový krok jsou dány

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - \frac{P_{k|k-1} h_k h_k^T P_{k|k-1}}{1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k} \quad (2.3)$$

$$\hat{\theta}_{k|k} = \hat{\theta}_{k|k-1} + P_{k|k} h_k (y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k|k-1}) \quad (2.4)$$

( $k|k-1$  první index značí běžný čas a druhý index čas posledního měření, které se podílí na určení odhadu),  $P_{k|k} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  představuje kovarianční matici chyby odhadu a její inverze  $R_{k|k} = P_{k|k}^{-1}$  informační matici. Rovnice popisující časový krok jsou v následujícím tvaru

$$P_{k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} P_{k|k} \quad (2.5)$$

$$\hat{\theta}_{k+1|k} = \hat{\theta}_{k|k} \quad (2.6)$$

Navýšení neurčitosti odhadovaných parametrů je v tomto případě dosaženo jednotným násobením všech vstupů matice  $P_{k|k}$  s faktorem  $1/\lambda_e > 1$ . Za podmínek nedostatečného vybudování daty, kdy vlastní čísla matice  $P_{k|k}$  nejsou omezována v datovém kroku výpočtu, vede (2.5) k jejich exponenciálnímu růstu.

Druhá z uvedených variant upravuje míru akumulované informace bez funkční závislosti vzhledem k jejím aktuálním hodnotám. Příkladem absolutního zapomínání může být klasické lineární zapomínání (LF) [38], které dosahuje schopnosti adaptace přičítáním nezáporně definitní matice k matici kovarianční. Jedná se o zapomínání indukované modelem vývoje parametrů ve tvaru náhodné procházky

$$\theta_{k+1} = \theta_k + v_k \quad (2.7)$$

kde  $v_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  je šum procesu, u kterého v ideálním případě předpokládáme vlastnosti Gaussova bílého šumu, tj.  $v_k \sim N(0; \sigma_e^2 V_k)$ . Matici  $V_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$  obvykle volíme nulovou vyjma prvků na hlavní diagonále. Jejich velikost je dána naší představou o rychlosti změny parametrů. Časový vývoj kovarianční matice chyby odhadu tak probíhá podle

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} + V_k \quad (2.8)$$

Nebudou-li v následujících datových krocích podle schématu (2.3) modifikována vlastní čísla matice  $P_{k|k}$ , dochází k jejich lineárnímu růstu, proto označujeme tuto

techniku zapomínání jako lineární. Je zřejmé, že u metody RLS doplněné o techniku jak exponenciálního, tak i lineárního zapomínání, lze oba kroky algoritmu sloučit, čímž získáme rekurzi na apriorních  $(\hat{\theta}_{k+1|k})$ , nebo aposteriorních  $(\hat{\theta}_{k|k})$  hodnotách.

Hlavním nedostatkem zapomínání podle (2.5) a (2.8) je jev v literatuře označovaný jako „přebuzení kovarianční matice“. K tomuto jevu dochází v případech, kdy systém není dostatečně vybuzen a sekvence dat  $\{h_k\}$  v sobě nenese dostatečné množství informace. Vlivem konstantního zapomínání dochází k neustálému snižování akumulované informace, přičemž zapomenutá informace není nahrazována informací nově přichozí. V důsledku této skutečnosti, mohou některá vlastní čísla matice  $P_{k|k}$  ve fázi nedostatečného vybuzení neomezeně růst v některých směrech a vlastní čísla matice  $R_{k|k}$  naopak v některých směrech konvergovat k nulovým hodnotám, a protože výpočet korekčního členu  $P_{k|k} h_k$  je odvozen od hodnoty matice  $P_{k|k}$ , algoritmus se stává extrémně citlivý na případné vybuzení procesu v těchto směrech.

Jedním z přístupů, zabráňujícím soustavnému zapomínání nevybuzené informace, je filosofie tzv. omezeného (RF), nebo rovněž směrového zapomínání (DF). Základní myšlenkou této filosofie je selektivně zapomínat v časovém kroku algoritmu pouze tu část informace, která byla (popř. bude) aktualizována ve směru dat  $h_k$  v datovém kroku.

V práci [33] lze nalézt zobecněný přístup selektivního zapomínání, který ovšem vyžaduje explicitní znalost vlastních čísel kovarianční matice. V této metodě je dekomponovaná kovarianční matice aktualizována v časovém kroku dle vztahu

$$P_{k+1|k} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_{i,k|k}}{\lambda_{ei(k)}} \nu_{i,k} \nu_{i,k}^T \quad 0 < \lambda_{ei(k)} < 1 \quad (2.9)$$

kde  $\lambda_{i,k|k}$  je vlastní číslo matice  $P_{k|k}$  a  $\lambda_{ei(k)}$  je jemu odpovídající faktor zapomínání (pro  $i = 1, \dots, p$ ). Faktor  $\lambda_{ei(k)}$  je funkcí informačního přínosu dat  $h_k$  získaného ve směru vlastního vektoru  $\nu_{i,k}$ .

V [14] byla navržena technika lineárního zapomínání, u níž dochází ke zvyšování neurčitosti parametrů podle neomezeného modelu (2.7) pouze ve směru  $h_k$ . Namísto původní matice  $V_k$  je aplikována pouze část této matice  $V_{2,k}$  s hodnotí  $\text{rank}(V_{2,k}) = \text{rank}(h_k h_k^T)$  modifikující akumulovanou informaci podle schématu

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} + V_{2,k} = P_{1,k|k} + \beta_k P_{2,k|k} \quad (2.10)$$

kde jednotlivé kvantitativy  $P_{1,k|k}$ ,  $P_{2,k|k}$  a  $\beta_k$  jsou jednoznačně vymezeny následujícími



postuláty

$$h_k^T P_{k+1|k} h_k = h_k^T P_{k|k} h_k + h_k^T V_k h_k \quad (2.11)$$

$$h_k^T P_{1,k|k} h_k = 0 \quad (2.12)$$

$$h_k^T P_{2,k|k} h_k = h_k^T P_{k|k} h_k \quad (2.13)$$

$$\text{rank}(P_{2,k|k}) = \text{rank}(V_{2,k}) \quad (2.14)$$

Splněním požadavku (2.10) s omezující podmínkou kladenou na hodnotu  $V_{2,k}$  obdržíme ze vztahu (2.8) časový krok obnovy  $P_{k+1|k}$  pro omezené lineární zapomínání založené na dekompozici kovarianční matice<sup>1</sup> ve tvaru

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} + \frac{P_{k|k} h_k h_k^T V_k h_k h_k^T P_{k|k}}{(h_k^T P_{k|k} h_k)^2} \quad (2.15)$$

Protože exponenciální zapomínání může být chápáno jako speciální případ zapomínání lineárního [21] s aditivní datově řízenou maticí, píšeme

$$V_k = \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} P_{k|k} \quad (2.16)$$

odtud dosazením výrazu (2.16) do (2.15) po úpravě získáme

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} \left( I + \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} \frac{h_k h_k^T P_{k|k}}{h_k^T P_{k|k} h_k} \right) \quad (2.17)$$

Časový krok algoritmu s takto upraveným výpočtem označíme jako omezené exponenciální zapomínání založené na dekompozici kovarianční matice<sup>2</sup> [20, 4], neboť je zřejmé, že faktorem  $1/\lambda_e$  násobíme pouze část matice  $P_{k|k}$

$$P_{k+1|k} = P_{1,k|k} + \frac{1}{\lambda_e} P_{2,k|k} \quad (2.18)$$

kde produkty  $P_{1,k|k}$ ,  $P_{2,k|k}$  jsou jednoznačně určeny porovnáním vztahů (2.18) a (2.17). Jednoduše lze vyvodit, že  $P_{1,k|k}$  a  $P_{2,k|k}$  splňují požadavky

$$P_{1,k|k} h_k = 0 \quad (2.19)$$

$$P_{2,k|k} h_k = P_{k|k} h_k \quad (2.20)$$

$$\text{rank}(P_{2,k|k}) = \text{rank}(h_k h_k^T) \quad (2.21)$$

---

<sup>1</sup>V práci [14] je metoda nazývána omezeným lineárním zapomínáním. Z důvodu teoretické existence varianty metody využívající principu rozkladu informační matice, je název metody odvozen od dekompozice kovarianční matice.

<sup>2</sup>V práci Kulhavého [20], původního autora metody, nese tato metoda pojmenování směrové zapomínání, nebo pouze omezené exponenciální zapomínání.

Podobnou strategií vedoucí na směrové zapomínání je omezené exponenciální zapomínání založené na dekompozici informační matice [6]. Myšlenkou této metody je dekomponovat matici  $R_{k|k}$  rovněž na produkt součtu dvou matic  $R_{1,k|k}$  a  $R_{2,k|k}$  majících vlastnosti

$$R_{1,k|k} h_{k+1} = 0 \quad (2.22)$$

$$R_{2,k|k} h_{k+1} = R_{k|k} h_{k+1} \quad (2.23)$$

$$\text{rank}(R_{2,k|k}) = \text{rank}(h_{k+1} h_{k+1}^T) \quad (2.24)$$

a exponenciálně zapomínat pouze na tu část matice, která není ortogonální k vektoru  $h_{k+1}$ . Po úpravách ve výsledku obdržíme časový krok výpočtu kovarianční matice  $P_{k+1|k}$  ve tvaru

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} \left( I + \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} \frac{R_{k|k} h_{k+1} h_{k+1}^T}{h_{k+1}^T R_{k|k} h_{k+1}} \right) \quad (2.25)$$

vývoj  $R_{k|k}$  pak probíhá podle

$$R_{k|k} = R_{k|k-1} + h_k h_k^T \quad (2.26)$$

$$R_{k+1|k} = \left( I - (1 - \lambda_e) \frac{R_{k|k} h_{k+1} h_{k+1}^T}{h_{k+1}^T R_{k|k} h_{k+1}} \right) R_{k|k} \quad (2.27)$$

Výhodou techniky LF podle (2.8) a (2.15), oproti popsaným metodám (2.5), (2.17) a (2.25) pracujících na bázi EF s jediným faktorem zapomínání, je možnost přizpůsobovat rychlost adaptace individuálně pro jednotlivé prvky vektoru parametrů. Na druhou stranu, aplikace LF (zejména klasického LF) je citlivá na volbu aditivní matice  $V_k$  a vyžaduje tak hlubší apriorní znalost charakteru identifikovaného procesu. Popsané přístupy (omezeného) exponenciálního zapomínání předpokládají, že časový vývoj parametrů se uskutečňuje s podobnou rychlostí. S odvoláním na rekurzivní schéma (2.4) je chyba celkového odhadu všech parametrů koncentrována do jediného skalárního výrazu, odkud se šíří přímo úměrně vzhledem k datově řízenému korekčnímu členu  $P_{k|k} h_k$  ke všem parametrům. V případě, kdy dochází ke driftu pouze v některých parametrech, může nastat v důsledku aplikace korekce svázané s jednotným faktorem zapomínání k nežádoucím průběhům v estimaci parametrů [41]. Abychom mohli ovlivnit dopad celkové chyby odhadu na jednotlivé prvky parametrů, musíme zavést určitou formu dekompozice této chyby vzhledem k jednotlivým parametrům. Cílem je získat částečnou chybu způsobenou dílčími parametry a následně použít vhodný faktor zapomínání pro každý parametr zvlášť. Tato myšlenka byla matematicky formulována do tvaru kritériální funkce v práci [41]. Zobecněním této funkce a začleněním omezující podmínky typu rovnost [1, 10, 38]

získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\theta_k) = & \sum_{i=1}^p \left\| \theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,0} \right\|^2 \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{ei} \right)^{P_{i,0}^{-1}} + \\ & + \sum_{i=1}^p \left\| Y_k - H_{i,k} \theta_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} H_{j,k} \hat{\theta}_{j,k} - \sum_{j=i+1}^p H_{j,k} \hat{\theta}_{j,k} \right\|_{Q_{i,k}}^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde  $\|\cdot\|_Q^2$  značí váhovanou Euklidovskou vektorovou normu maticí  $Q$  odpovídajících rozměrů,  $H_k \in \mathbb{R}^{k \times p}$  je regresní matice pozorování akumulující v sobě měřené informace z procesu

$$H_k = \begin{bmatrix} h_k^T \\ h_{k-1}^T \\ h_{k-2}^T \\ \vdots \\ h_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,k} & H_{2,k} & H_{3,k} & \cdots & H_{p,k} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Zápis  $H_{i,k}$  proto označuje  $i$ -tý sloupec matice  $H_k$  a notace  $\theta_{i,k}$  značí  $i$ -tou souřadnici vektoru  $\theta_k$ ,  $Y_k \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  je vektor měřených výstupů

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

První člen v kritériální funkci (2.28) penalizuje váženou Euklidovskou vzdálenost hledaného parametru  $\theta_{i,k}$  od svého počátečního odhadu  $\hat{\theta}_{i,0}$ . Smyslem omezující podmínky je odstranění nejednoznačnosti kritéria a tím zajištění regulárnosti informační matice  $P_k^{-1}$ . Regularizačními členy jsou v tomto případě počáteční hodnoty diagonálních vstupů informační matice  $P_{i,0}^{-1}$ . Přidáním omezující podmínky lze zajistit, že kritérium bude vzhledem ke zvolené parametrizaci injektivní již od prvního kroku výpočtu, čímž je umožněno jeho dynamické řešení. Druhý kvadratický člen ve funkci (2.28) zastupuje postupně chybu odvozenou od každého z hledaných parametrů a případnou nepřesnost odhadu souboru všech ostatních parametrů. Zápis (2.28) proto teoreticky umožňuje ocenit chybu vyvolanou jednotlivými parametry  $\theta_{i,k}$  exklusivní hodnotou faktoru  $\lambda_{ei}$ . Abychom dosáhli exponenciálního zapomínání, vážíme akumulovanou informaci prostřednictvím čtvercové matice  $Q_{i,k}$

$$Q_{i,k} = \begin{bmatrix} \lambda_{ei}^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ei}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Řešíme optimalizační problém (2.32) vzhledem k působení jednotlivých souřadnic vektoru  $\theta_k$

$$\hat{\theta}_{i,k} = \arg \min_{\theta_{i,k}} \mathcal{V}_k(\theta_k) \quad (2.32)$$

Optimální hodnotu  $\hat{\theta}_{i,k}$  podle kvadratického kritéria (2.28) nalezneme, položíme-li gradient  $\partial \mathcal{V}_k(\theta_k) / \partial \theta_{i,k}$  roven nule. Za předpokladu nenulové hodnoty výrazu  $\left(\prod_{j=1}^k \lambda_{ei}\right) P_{i,0}^{-1} + H_{i,k}^T Q_{i,k} H_{i,k}$  ve výsledku získáme dávkový výpočet odhadu  $\hat{\theta}_{i,k}$  ve formě

$$\hat{\theta}_{i,k} = P_k^{i,i} \left[ \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{ei} \right) P_{i,0}^{-1} \hat{\theta}_{i,0} + H_{i,k}^T Q_{i,k} \left( Y_k - \sum_{j=1}^{i-1} H_{j,k} \hat{\theta}_{j,k} - \sum_{j=i+1}^p H_{j,k} \hat{\theta}_{j,k} \right) \right] \quad (2.33)$$

kde pozice  $P_k^{i,i}$  je dána schématem

$$P_k^{i,j} = \begin{cases} \left[ \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{ei} \right) P_{i,0}^{-1} + H_{i,k}^T Q_{i,k} H_{i,k} \right]^{-1} & i = j \\ \left( H_{i,k}^T Q_{i,k} H_{j,k} \right)^{-1} & i \neq j \end{cases} \quad (2.34)$$

V tomto stavu jsou výsledky zaznamenané v (2.33) a (2.34) odlišné od publikované metody v pracích autorů [17, 41] a další matematické úpravy vedou na rozdílné optimalizační řešení. Porovnáním postupu odvození podle [41] s popsáním postupem nalezneme rozpor ve způsobu vyjádření  $\hat{\theta}_{i,k}$  z hodnoty gradientu. Dále bude dokázáno, že zápis  $P_k^{i,j}$  odkazuje na  $i$ -tý sloupec a  $j$ -tý řádek kovarianční matice  $P_k$ . Úpravou rovnice (2.33) pro  $i = 1, \dots, p$  získáme složkový zápis ve formě

$$\sum_{j=1}^p H_{i,k}^T Q_{i,k} H_{j,k} \hat{\theta}_{j,k} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{ei} \right) P_{i,0}^{-1} \hat{\theta}_{i,0} + H_{i,k}^T Q_{i,k} Y_k \quad (2.35)$$

a odtud osamostatněním vyšetřovaného vektoru  $\hat{\theta}_k$  obdržíme kompaktní zápis

$$\hat{\theta}_k = P_k \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + H_{\Lambda k}^T Y_k \right] \quad (2.36)$$

$$P_k = \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} + H_{\Lambda k}^T H_k \right]^{-1} \quad (2.37)$$

kde diagonální matice  $P_0^{-1}$  na jednotlivých vstupech vyjadřuje míru důvěry na počáteční volbu  $\hat{\theta}_{i,0}$

$$P_0^{-1} = \begin{bmatrix} P_{1,0}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{p,0}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

nově je výraz  $\lambda_e I$  nahrazen maticí faktorů podle

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_{e1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ep} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

a pro modifikovanou matici dat tak dostaneme

$$H_{\Lambda k} = \begin{bmatrix} Q_{1,k} & H_{1,k} & Q_{2,k}H_{2,k} & Q_{3,k}H_{3,k} & \cdots & Q_{p,k}H_{p,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_k^T \\ h_{k-1}^T \Lambda_k \\ h_{k-2}^T \Lambda_{k-1} \Lambda_k \\ \vdots \\ h_1^T \left( \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda_{j+1} \right) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Pro účely estimace v reálném čase není dávková forma výpočtu (2.36) a (2.37) příliš vhodná. Omezíme-li se na myšlenku zahrnutí všech dostupných dat pro získání odhadu  $\hat{\theta}_k$ , pak estimace touto formou výpočtu je jednoznačně výpočetně neefektivní a vede na růst rozměrů matic  $Y_k$ ,  $H_k$ ,  $H_{\Lambda k}$  v každém kroku výpočtu. Vhodnější variantou je výpočet aktuálního odhadu s využitím akumulované informace z předchozích kroků měření. Ze vztahu (2.37) může být stanovena následující rekurse

$$\begin{aligned} P_k &= \left[ \Lambda_k \left( \left( \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda_{k-j} \right) P_0^{-1} + H_{\Lambda k-1}^T H_{k-1} \right) + h_k h_k^T \right]^{-1} = \\ &= \left( \Lambda_k P_{k-1}^{-1} + h_k h_k^T \right)^{-1} = \\ &= P_{k-1} \Lambda_k^{-1} - \frac{P_{k-1} \Lambda_k^{-1} h_k h_k^T P_{k-1} \Lambda_k^{-1}}{1 + h_k^T P_{k-1} \Lambda_k^{-1} h_k} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Výpočet (2.36) pak ekvivalentně nahradíme

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= P_k \left[ \Lambda_k \left( \left( \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda_{k-j} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + H_{\Lambda k-1}^T Y_{k-1} \right) + h_k y_k \right] = \\ &= P_k \left( \Lambda_k P_{k-1}^{-1} \hat{\theta}_{k-1} + h_k y_k \right) = \\ &= \hat{\theta}_{k-1} + P_k h_k \left( y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Řešení (2.42) v kontrastu s (2.36) poskytuje vhodnější implementaci estimátoru slučujícího v sobě techniku mnohonásobného exponenciálního zapomínání (MEF). Rekurzivní výpočet (2.42), jedná se vlastně o rekurzi na aposteriorních hodnotách, může být opět rozepsán do dvou kroků na časovou a datovou aktualizaci. K navyšování neurčitosti v odhadovaných parametrech pak dochází podle

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} \Lambda_{k+1}^{-1} \quad (2.43)$$

Ačkoliv zapomínání (2.43) umožňuje přizpůsobovat rychlost adaptace s ohledem na rychlost vývoje individuálních parametrů, neřeší problém, kdy příchozí informace není rovnoměrně rozdělena do prostoru parametrů. Začleněním konceptu směrového zapomínání analogicky s postupem využívajícím dekompozici kovarianční matice do (2.43) po úpravách obdržíme

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} \left( I + \frac{1}{h_k^T P_{k|k} h_k} h_k h_k^T P_{k|k} (\Lambda_{k+1}^{-1} - I) \right) \quad (2.44)$$

A obdobně, využitím dekompozice informační matice bude časový krok obnovy  $P_{k+1|k}$  ve tvaru

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} \left( I + \frac{(I - \Lambda_{k+1}) R_{k|k} h_{k+1} h_{k+1}^T}{h_{k+1}^T \Lambda_{k+1} R_{k|k} h_{k+1}} \right) \quad (2.45)$$

Přímé řešení inverze  $P_{k|k}^{-1}$ , která je vyžadována ve výše položené rovnici, nahradíme výpočtem informační matice v datovém a časovém kroku

$$R_{k|k} = R_{k|k-1} + h_k h_k^T \quad (2.46)$$

$$R_{k+1|k} = \left( I - \frac{1}{h_{k+1}^T R_{k|k} h_{k+1}} (I - \Lambda_{k+1}) R_{k|k} h_{k+1} h_{k+1}^T \right) R_{k|k} \quad (2.47)$$

Začleněním (2.44) nebo (2.45) do koncepce rekurzivní metody nejmenších čtverců zajistíme selektivní zesílení elementů kovarianční matice s přidaným stupněm volnosti ve smyslu stavitelného efektivního počtu dat pro každého z hledaných parametrů. Výsledkem čehož můžeme přesněji postihnout změny v parametrech probíhající s rozdílnou rychlostí. Volíme-li  $\Lambda_{k+1} = \lambda_e I$ , pak se rovnice (2.44) a (2.45) zjednoduší až na tvar (2.17) a (2.25). Jedním z dalších známých přístupů umožňujících adaptivní estimaci je technika klouzavého, nebo rovněž omezeného datového okna (SW) [7, 15, 23]. Tato technika umožňuje adaptivní sledování časově variantního procesu prostřednictvím omezené paměti estimátoru, tedy nejstarší informace je striktně zapomenuta v okamžiku příchodu informace nové. Omezením horizontu pozorování u kritéria s rostoucím datovým oknem (2.28) na konečný počet  $N$  posledních měření, získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{k,N}(\theta_k) = & \sum_{i=1}^p \left\| \theta_{i,k} - \hat{\theta}_{i,0} \right\|^2 \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{ei} \right) P_{i,0}^{-1} + \\ & + \sum_{i=1}^p \left\| Y_{k,N} - H_{i,k,N} \theta_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} H_{j,k,N} \hat{\theta}_{j,k} - \sum_{j=i+1}^p H_{j,k,N} \hat{\theta}_{j,k} \right\|_{Q_{i,N}}^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

kde zápis prvního dolního indexu u matic  $Y_{k,N} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  a  $H_{k,N} \in \mathbb{R}^{N \times p}$  značí časový index nejhornějšího vstupu a druhý dolní index koresponduje s délkou pozorování,

tedy

$$Y_{k,N} = \begin{bmatrix} y_k & y_{k-1} & y_{k-2} & \cdots & y_{k-N+1} \end{bmatrix}^T \quad (2.49)$$

$$H_{k,N} = \begin{bmatrix} h_k & h_{k-1} & h_{k-2} & \cdots & h_{k-N+1} \end{bmatrix}^T \quad (2.50)$$

notací  $H_{i,k,N}$  opět rozumíme  $i$ -tý sloupec matice  $H_{k,N}$ . Volbou matice  $Q_{i,N}$  zajistíme exponenciální vážení kvadrátů separovaných chyb predikcí generovaných modelem o souřadnici  $\theta_{i,k}$  v okně

$$Q_{i,N} = \begin{bmatrix} \lambda_{ei}^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ei}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Problém, který je zde předestřen, je nalezení odhadu  $\hat{\theta}_k$  vektoru parametrů  $\theta_k$  minimalizujícího kvadratickou funkci (2.48)

$$\hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta_k} \mathcal{V}_{k,N}(\theta_k) \quad (2.52)$$

Řešením optimalizační úlohy (2.52) je potom

$$\hat{\theta}_k = P_k \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + H_{\Lambda k,N}^T Y_{k,N} \right] \quad (2.53)$$

$$P_k = \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} + H_{\Lambda k,N}^T H_{k,N} \right]^{-1} \quad (2.54)$$

kde modifikovaná matice dat  $H_{\Lambda k,N}$

$$H_{\Lambda k,N} = \begin{bmatrix} h_k & \Lambda_k h_{k-1} & \Lambda_k \Lambda_{k-1} h_{k-2} & \cdots & \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N+1} \end{bmatrix}^T \quad (2.55)$$

Odvození rekurentního řešení, tedy metody RLS slučující v sobě požadavky na SW a současně MEF (MEF-SW-RLS), které bude matematicky ekvivalentní dávkovému výpočtu (2.53), lze zkonstruovat ve dvou krocích. Nejdříve je z paměti estimátoru odstraněna aktivní část datové informace příšle v okamžiku  $k-N$ , čímž je v datovém horizontu uchováno právě  $N-1$  vzorků od okamžiku  $k-N+1$  až do  $k-1$ , následně je do paměti začleněno nově dostupné pozorování tak, aby byla dodržena pevná délka datového okna o počtu  $N$  vzorků od  $k-N+1$  až do  $k$ . Pro další postup je

zřejmé

$$H_{k,N+1} = \begin{bmatrix} h_k^T \\ H_{k-1,N-1} \\ h_{k-N}^T \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$H_{\Lambda k,N+1} = \begin{bmatrix} h_k^T \\ H_{\Lambda k-1,N-1} \Lambda_k \\ h_{k-N}^T \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-N+j} \right) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$Y_{k,N+1} = \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1,N-1} \\ y_{k-N} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Z definice kovarianční matice (2.54) vyplývá, že

$$\begin{aligned} P_k &= \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} + \begin{bmatrix} h_k & \Lambda_k H_{\Lambda k-1,N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k^T \\ H_{k-1,N} \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} h_{k-N}^T \right]^{-1} = \\ &= \left\{ \Lambda_k \left[ \left( \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda_{k-j} \right) P_0^{-1} + H_{\Lambda k-1,N}^T H_{k-1,N} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} h_{k-N}^T + h_k h_k^T \right\}^{-1} = \\ &= \left[ \Lambda_k P_{k-1}^{-1} - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} h_{k-N}^T + h_k h_k^T \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.59)$$



odtud úpravou (2.53) obdržíme

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_k &= P_k \left[ \left( \prod_{j=1}^k \Lambda_{k-j+1} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \begin{bmatrix} h_k & \Lambda_k H_{\Lambda_{k-1}, N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1, N} \end{bmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} y_{k-N} \right] = \\
&= P_k \left\{ \Lambda_k \left[ \left( \prod_{j=1}^{k-1} \Lambda_{k-j} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + H_{\Lambda_{k-1}, N}^T Y_{k-1, N} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} y_{k-N} + h_k y_k \right\} = \\
&= P_k \left[ \Lambda_k P_{k-1}^{-1} \hat{\theta}_{k-1} - \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} y_{k-N} + h_k y_k \right] = \\
&= \hat{\theta}_{k-1} - P_k \left( \prod_{j=1}^N \Lambda_{k-j+1} \right) h_{k-N} (y_{k-N} - h_{k-N}^T \hat{\theta}_{k-1}) + P_k h_k (y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k-1})
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Protože aditivní kvantita ve formě součtu dvou datových dyád vystupující v (2.59) může mít vyšší než jednotkovou hodnotu, aplikace lemmy o inverzi matice (Shermanovy-Morrisonovy formule) [37] přímo na (2.59) nemusí nutně vést na skalární dělení. Výpočet (2.59) ekvivalentně rozepíšeme do dvou kroků tak, aby v jednotlivých krocích docházelo k aditivní aktualizaci prostřednictvím matice s hodnotou jedna. Následně užitím lemmy o inverzi matice můžeme redukovat výpočetní náročnost z  $\mathcal{O}(p^3)$  na  $\mathcal{O}(p^2)$  ( $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ), tedy

$$\begin{aligned}
Z_k &= \left[ P_{k-1}^{-1} - \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} h_{k-N}^T \right]^{-1} = \\
&= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} h_{k-N}^T P_{k-1}}{-1 + h_{k-N}^T P_{k-1} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N}}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
P_k &= \left( \Lambda_k Z_{k-1}^{-1} + h_k h_k^T \right)^{-1} = \\
&= Z_k \Lambda_k^{-1} - \frac{Z_k \Lambda_k^{-1} h_k h_k^T Z_k \Lambda_k^{-1}}{1 + h_k^T Z_k \Lambda_k^{-1} h_k}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pomocná kvantita  $Z_k$  v sobě akumuluje  $N - 1$  vzorků od okamžiku  $k - 1$  až do  $k - N + 1$  a její rekurze, stejně jako u matice  $P_k$ , zahrnuje inverzi matice s jednotkovou

dimenzí. S využitím (2.61) a (2.62) vztah (2.60) upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} - \left\{ I - P_k \left[ P_k^{-1} - (Z_k \Lambda_k^{-1})^{-1} \right] \right\} Z_k \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} (y_{k-N} - h_{k-N}^T \hat{\theta}_{k-1}) + \\
&\quad + P_k h_k (y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k-1}) = \\
&= \hat{\theta}_{k-1} - (I - P_k h_k h_k^T) Z_k \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} (y_{k-N} - h_{k-N}^T \hat{\theta}_{k-1}) + \\
&\quad + P_k h_k (y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k-1}) = \\
&= \hat{z}_k + P_k h_k h_k^T Z_k \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} (y_{k-N} - h_{k-N}^T \hat{\theta}_{k-1}) + P_k h_k (y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k-1}) = \\
&= \hat{z}_k + P_k h_k (y_k - h_k^T \hat{z}_k)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

kde byl zaveden pomocný odhad  $\hat{z}_k$ , pro který funkce (2.48) ve smyslu  $V_{k-1, N-1}(\theta_{k-1})$  nabývá svého minima

$$\hat{z}_k = \hat{\theta}_{k-1} - Z_k \left( \prod_{j=1}^{N-1} \Lambda_{k-j} \right) h_{k-N} (y_{k-N} - h_{k-N}^T \hat{\theta}_{k-1}) \tag{2.64}$$

Jinak řečeno,  $\hat{z}_k$  je hledaným řešením  $\hat{\theta}_{k-1}$  minimalizující funkci (2.48) na horizontu o délce  $N - 1$  pozorování platných od okamžiku  $k - 1$  až do  $k - N + 1$ . Ačkoliv vztahy (2.61-2.64) implementují výpočetně efektivnější způsob řešení problému (2.48) v porovnání s (2.53) a (2.54), nároky na paměť zůstaly zachovány a všechna data spadající do datového okna musí být v průběhu výpočtu přístupná. Omezením datového okna snižujeme dopad starších dat na nové odhady parametrů, v důsledku čehož dojde relativně vzhledem k naměřeným datům k navýšení hodnoty korekčního členu. Na druhou stranu, nepostihuje-li datové okno vybuzený stav procesu, estimator ztrácí informaci o jeho dynamice a stává se náchylný na působení stochastické složky. Navíc, v návaznosti na konstantní zapomínání může docházet k neomezenému růstu vlastních čísel kovarianční matice, který může vyústit až v její přebuzení. Požadavkem je tak propojení přístupu klouzavého datového okna (zvýhodnit informaci na vymezeném datovém segmentu) a směrového zapomínání (zapomínat informaci obsaženou v příchozích datech). Nezamezíme-li proto ztrátě informace o směrech parametrů, je praktické nasazení klasické techniky klouzavého datového okna v aplikacích pro adaptivní řízení značně limitující, neboť stav nevybuzení je pro řízený proces charakteristický.

Bude ukázáno, že mechanismus ohodnocení významu nově příchozích dat relativně v porovnání s těmi již uloženými v informační nebo kovarianční matici, nemůže být u rekursivního řešení spojeného s minimalizací (2.48) korektně postaven na obecném

přístupu směrového zapomínání podle (2.17) nebo (2.25). Detailněji, s odvoláním na (2.53), (2.54) a směrové zapomínání (2.47) sestavíme schéma výpočtu

$$R_k = \left( \prod_{j=1}^k M_{k-j+1} \right) P_0^{-1} + \sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1}^{i-1} M_{k-j+1} \right) h_{k-i+1} h_{k-i+1}^T + \\ + \sum_{i=1}^{k-N} \left( \prod_{j=1}^{N+i-1} M_{1,k-j+1} \right) h_{k-N-i+1} h_{k-N-i+1}^T \quad (2.65)$$

$$\hat{\theta}_k = R_k^{-1} \left( \prod_{j=1}^k M_{k-j+1} \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + R_k^{-1} \sum_{i=1}^N \left( \prod_{j=1}^{i-1} M_{k-j+1} \right) h_{k-i+1} y_{k-i+1} + \\ + R_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-N} \left( \prod_{j=1}^{N+i-1} M_{1,k-j+1} \right) h_{k-N-i+1} y_{k-N-i+1} \quad (2.66)$$

tvar matice směrového zapomínání  $M_k$  odvodíme ze vztahu (2.47)

$$M_k = I - \frac{1}{h_k^T R_{k-1} h_k} (I - \Lambda_k) R_{k-1} h_k h_k^T \quad (2.67)$$

matici  $M_k$  lze rozložit na součet

$$M_k = M_{1,k} + M_{2,k} \quad (2.68)$$

kde pro jednotlivé složky matice  $M_k$  platí

$$M_{1,k} = I - \frac{1}{h_k^T R_{k-1} h_k} R_{k-1} h_k h_k^T \quad M_{2,k} = \frac{1}{h_k^T R_{k-1} h_k} \Lambda_k R_{k-1} h_k h_k^T \quad (2.69)$$

Výrazy (2.65), (2.66) interpretujeme následujícím způsobem. Prvních  $N$  dat vymezených oknem je omezeně exponenciálně zapomínáno s maticí směrového zapomínání  $M_k$  s ohledem na všechny aktivní informace získané pozorováním. Zbylých  $k - N$  dat je modifikováno pouze částí matice  $M_k$  tak, aby estimátor striktně odstranil informaci mimo vymezené datové okno, která je nesena v nově příchozích datech. A protože matice  $R_k$  podle (2.65) je časově závislá z důvodu vývoje matice exponenciálního zapomínání v ní vystupující

$$\Lambda_t = \begin{cases} \Lambda & k - N + 1 < t \leq k \\ 0I & t \leq k - N + 1 \end{cases} \quad (2.70)$$

nelze zavést rekurzivní výpočet, který by současně zapomínal podle strategie (2.67). Nalezení rekurzivního řešení by bylo teoreticky možné ve speciálním případě propojením směrového zapomínání s klouzavým obdélníkovým oknem. Tedy za podmínek, kdy k zapomínání nedochází v rámci vybraného datového segmentu a mimo tento segment jsou všechny informace, které mohou být zapomenuty, odstraněny. Jinou

z možností, jak uchovávat potřebný informační obsah, je modifikace SW na samostatně se nastavující délku datového okna, která se přizpůsobuje stavu procesu. Tato úloha však do současnosti nebyla uspokojivě vyřešena.

Práci, zabývající se otázkou stavitelné délky datového okna lze nalézt např. v [18]. V tomto přístupu je délka datového okna měněna v závislosti na změnách detekovaných v parametrech s využitím chyby predikované modelem.

Otázku estimace parametrů obecného stochastického modelu řeší Kalmanův filtr (KF), který je považován za nejlepší lineární estimátor [22, 43] minimalizující střední kvadratickou odchylku parametrů.

Aplikací algoritmu je generována posloupnost lineárních aposteriorních  $\hat{\theta}_{k|k}$  popř. apriorních  $\hat{\theta}_{k+1|k}$  odhadů a tomu odpovídající posloupnost kovariančních matic chyb odhadu

$$P_{k|k} = \mathcal{E} \left\{ \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k|k} \right) \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k|k} \right)^T \right\} \quad (2.71)$$

$$P_{k+1|k} = \mathcal{E} \left\{ \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k+1|k} \right) \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k+1|k} \right)^T \right\} \quad (2.72)$$

přičemž odhad  $\hat{\theta}_{k|k}$  v každém kroku výpočtu minimalizuje kritériální funkci

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\theta_k) &= \mathcal{E} \left\{ \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k|k} \right)^T \left( \theta_k - \hat{\theta}_{k|k} \right) \right\} \\ &= \text{tr} \left( P_{k|k} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

a  $\hat{\theta}_{k+1|k}$  tak představuje podmíněnou střední hodnotu očekávaného šíření parametrů  $\hat{\theta}_{k|k}$  vzhledem ke stavové rovnici přechodu. Pro účely estimace stavu (vlastně parametrů) můžeme KF spojit se stavovým modelem ve tvaru

$$\theta_{k+1} = A_k \theta_k + B_k u_k + G_k e_k + v_k \quad (2.74)$$

$$y_k = C_k \theta_k + e_k \quad (2.75)$$

kde známé matice systému a charakteristiky vzájemně nekorelujících šumů  $e_k$  a  $v_k$  splňují:  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $G_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $e_k \sim N(0; \sigma_{e(k)}^2)$ ,  $v_k \sim N(0; V_k)$ ,  $\mathcal{E} \{ v_i e_j^T \} = 0$ . Výsledné vztahy popisující časový a datový krok KF lze shrnout do následujících rovnic

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - \frac{P_{k|k-1} C_k^T C_k P_{k|k-1}}{\sigma_{e(k)}^2 + C_k P_{k|k-1} C_k^T} \quad (2.76)$$

$$\hat{\theta}_{k|k} = \hat{\theta}_{k|k-1} + \frac{1}{\sigma_{e(k)}^2} P_{k|k} C_k^T \left( y_k - C_k \hat{\theta}_{k|k-1} \right) \quad (2.77)$$

$$P_{k+1|k} = (A_k - G_k C_k) P_{k|k} (A_k - G_k C_k)^T + V_k \quad (2.78)$$

$$\hat{\theta}_{k+1|k} = (A_k - G_k C_k) \hat{\theta}_{k|k} + B_k u_k + G_k y_k \quad (2.79)$$

Pro praktické nasazení a vyšetřování vlastností filtru je možné spojit oba kroky výpočtu do jediné rovnice. Z hlediska numerických vlastností je výhodné implementovat alternativní zápis k výpočtu (2.76) podle

$$P_{k|k} = (I - K_k C_k) P_{k|k-1} (I - K_k C_k)^T + \sigma_{e(k)}^2 K_k K_k^T \quad (2.80)$$

kde  $K_k$  definuje Kalmanovo zesílení

$$K_k = \frac{P_{k|k-1} C_k^T}{\sigma_{e(k)}^2 + C_k P_{k|k-1} C_k^T} \quad (2.81)$$

Varianta (2.80) je v literatuře známá jako Josephova stabilizační verze kovarianční matice [5]. Tato symetrická varianta garantuje setrvání pozitivní definitnosti  $P_{k|k}$  pokud matice  $P_{k|k-1}$  zůstává pozitivně definitní. Vlivem zaokrouhlovacích chyb v numericky špatně podmíněných případech výpočet  $P_{k|k}$  podle (2.76) totiž nezaručuje, že  $P_{k|k}$  si uchová vlastnosti pozitivně definitní symetrické matice.

Aplikace KF je obvykle spojována se stavovým modelem, jehož parametry mohou být časově proměnné avšak nezávislé na datech. V práci [25] je dokázáno, že i v takovém případě KF poskytuje optimální odhad minimalizující střední kvadratickou chybu odhadu (2.73). Aplikací KF na stavový model (2.7) s rovnicí výstupu (2.2) za předpokladu  $\mathcal{E}\{v_i e_j^T\} = 0$  a  $\sigma_{e(k)}^2 = 1$  je pak vzniklé rekurzivní řešení shodné s implementací dříve diskutované metody LF-RLS. Opačně lze KF chápat jako speciální případ vážené metody LF-RLS. Protějškem ke způsobu stochastické minimalizace, který vede na ekvivalentní způsob zápisu KF, je dynamická optimalizace deterministického kritéria. Pro nalezení rekurzivního schématu se obvykle zavádí Lagrangeovy multiplikátory [8]. Tuto koincidenci lze připisovat vzájemnému propojení požadavku na minimalizaci střední kvadratické hodnoty a maximalizaci věrohodností funkce v případě Gaussovského procesu. V takovém případě hodnota přirozeného logaritmu věrohodností funkce (mající charakter funkce exponenciální) přímo odpovídá tvaru zápisu deterministického kritéria v kontextu stochastického problému [26].

Pro splnění požadavků korektní funkcionality KF je vyžadována znalost kovariančních matic šumu měření a šumu procesu. Kovariance těchto kvantit jsou ve většině průmyslových aplikací neznámé veličiny. Nedostatečná znalost této informace společně v kombinaci s částečnou či neúplnou informací o dynamických vlastnostech procesu může vyvolat divergenci v odhadovaných stavech procesu. Jedním z prostředků jak navýšit robustnost v odhadování jsou tzv.  $H_\infty$  filtry. Filtry  $H_\infty$  postavené na principu teorie her jsou modifikací KF s požadavkem na minimalizaci omezeného kritéria, viz [22, 37]. Jestliže chceme přímo získat hodnoty hledaných stavů systému (2.74) a současně očekáváme, že pro získané hodnoty je kritériální

funkce shora omezená, lze tento požadavek definovat následujícím předpisem

$$\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_0, e_k, v_k) = \frac{\sum_{k=0}^{k-1} \|\theta_k - \hat{\theta}_k\|_2^2}{\|\theta_0 - \hat{\theta}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{k-1} \left( \|e_k\|_{1/\sigma_{e(k)}^2}^2 + \|v_k\|_{V_k^{-1}}^2 \right)} < \frac{1}{\gamma} \quad (2.82)$$

kde  $\gamma$  je hodnota svázaná s omezením. Z teoretické perspektivy chápeme herní strategii optimalizace stavů modelu jako soutěžení  $\hat{\theta}_k$  proti  $e_k, v_k$  a počáteční hodnotě  $\hat{\theta}_0$  s cílem minimalizovat (proti maximalizovat) kritérium (2.82). Tento herní problém má zřejmě přípustnou dvojici řešení v závislosti na pořadí hráčů. Proto volíme strategii, v níž připouštíme nejhorší možný případ, tj. horní cena hry pro níž platí

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_{opt,k}, \hat{\theta}_{opt,0}, e_{opt,k}, v_{opt,k}) &= \min_{\hat{\theta}_k} \left\{ \max_{\hat{\theta}_0, e_k, v_k} \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_0, e_k, v_k) \right\} \geq \\ &\geq \max_{\hat{\theta}_0, e_k, v_k} \left\{ \min_{\hat{\theta}_k} \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_0, e_k, v_k) \right\} \end{aligned} \quad (2.83)$$

tedy optimální hodnoty  $\{\hat{\theta}_{opt,k}, \hat{\theta}_{opt,0}, e_{opt,k}, v_{opt,k}\}$  podle herní strategie (2.82) nalezneme řešením minmax problému v (2.83). Detailní odvození  $H_\infty$  filtru lze nalézt např. v [2]. Budeme-li vyšetřovat klasický KF jako minmax filtr, lze vyvodit, že KF je případ  $H_\infty$  filtru s omezující podmínkou odpovídající  $1/\gamma = \infty$ . Ačkoliv KF minimalizuje požadavek (2.73), neposkytuje žádnou záruku, pokud jde o omezení nejhoršího případu odhadu v důsledku neomezené hodnoty kritériální funkce. Na druhou stranu, příliš ostrá podmínka omezení nemusí být slučitelná s řešením daného problému a získaný odhad  $\hat{\theta}_k$  pak nemusí být hledaným minimem (2.82). Ve své podstatě  $H_\infty$  filtr kompenzuje nemodelovaný vývoj stavů a nepřesnosti v odhadech charakteristik stochastických složek procesu umělým navýšením vstupů kovarianční matice. Prakticky stejného výsledku lze dosáhnout navýšením významu lineárního zapomínání.

## 2.2 Mnohamodelová metoda nejmenších čtverců

Až doposud byly v práci diskutovány modifikace konvenční metody nejmenších čtverců (LS). Řešíme-li otázku využitelnosti měřených dat získaných pozorováním procesu, pak jejich vyhodnocení konvenčními metodami LS lze považovat za neefektivní. Jinými slovy, pouze malá část informace akumulovaná v matici pozorování a vektoru měřených výstupů se podílí na formování vyšetřovaného modelu. Estimátor na bázi klasické metody nejmenších čtverců produkuje odhad modelu  $n$ -tého řádu, ačkoliv akumulovaná data obsahují mnohem více informací než pouhé odhady parametrů modelu nejvyššího řádu. Rozšířená identifikace metodou nejmenších čtverců

(AI-LS) původně navržená v [30] vychází z vlastností rozšířené informační matice (AIM), která v sobě akumuluje odhady modelů všech řádů a současně poskytuje hodnoty kritériálních funkcí odpovídajících těmto modelům. Faktorizovaná varianta metody AI-LS na bázi  $LDL^T$  dekompozice (ALDI-LS) pak rozkladem jediné matice a vyřešením inverze trojúhelníkové matice přímo zprostředkovává odečitatelné hodnoty vektorů parametrů od 1. až po  $n$ -tý uživatelem definovaný řád modelu. Výsledkem je kompaktní a stabilní struktura s jednoduchou interpretací a implementací. Předpokládáme, že pozorováním procesu až do okamžiku  $k$  získáme sekvenci vstupně výstupních párů dat podle

$$\{u_1, y_1\}, \{u_2, y_2\}, \dots, \{u_k, y_k\} \quad (2.84)$$

kde  $u_k$  je známá hodnota buzení procesu a  $y_k$  je tomu odpovídající měřená odezva. Dále uvažujeme, že vlastnosti vyšetřovaného procesu mohou být popsány lineární diferenční rovnicí ve tvaru ARX modelu [27]

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} + e_k \quad (2.85)$$

kde  $n$  je řád modelu. Nebo ekvivalentně ve formě lineární regrese

$$y_k = h_k^T \theta_k + e_k \quad (2.86)$$

Zatímco konvenční metody nejmenších čtverců respektují uspořádání

$$h_k = [u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, -y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}]^T \quad (2.87)$$

$$\theta_k = [b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n]^T \quad (2.88)$$

multimodelové schéma definuje rozšířený vektor pozorování  $\varphi_k \in \mathbb{R}^{(p+1) \times 1}$  jehož součástí je i hodnota aktuálního výstupu

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} h_k \\ -y_k \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

a vektor  $h_k$  s odlišným systémem pořadí elementů vzhledem k (2.87). Jednotlivé elementy jsou zde složeny z posloupností vstupně výstupních párů (čemuž patřičně odpovídá i pořadí parametrů v (2.88))

$$h_k = [-y_{k-n}, u_{k-n}, \dots, -y_{k-1}, u_{k-1}]^T \quad (2.90)$$

Jednotlivé přístupy multimodelové identifikace se od sebe vzájemně a od základního přístupu nejmenších čtverců odlišují zejména v mechanismu sestavení vektoru pozorování. Nyní definujeme rozšířenou matici pozorování  $\Phi_k \in \mathbb{R}^{k \times (p+1)}$  složenou

z vektorů  $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \varphi_k^T \\ \varphi_{k-1}^T \\ \varphi_{k-2}^T \\ \vdots \\ \varphi_1^T \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

a odtud rozšířenou kovarianční matici (ACM)

$$\mathcal{C}_k = (\Phi_k^T \Phi_k)^{-1} = \left( \sum_{i=1}^k \varphi_i \varphi_i^T \right)^{-1} \quad (2.92)$$

Všimněme si, že rozšířená kovarianční matice  $\mathcal{C}_k \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  je sestavená analogicky ke klasické kovarianční matici  $P_k$ . Inverze  $\mathcal{C}_k^{-1}$  pak v kontextu parametrické estimace označuje rozšířenou informační matici (AIM), tedy

$$\mathcal{M}_k = \Phi_k^T \Phi_k = \sum_{i=1}^k \varphi_i \varphi_i^T \quad (2.93)$$

Výhodou rozšířené struktury je právě vlastnost matice  $\mathcal{M}_k$  (a tím i  $\mathcal{C}_k$ ), která obsahuje informaci o všech procesních parametrech a úrovních kritériálních funkcí každého z modelů a to od 1. řádu až po uživatelem definovaný nejvyšší  $n$ -tý řád. Obecně lze uvést, že struktura rozšířené identifikace vždy řeší mnohamodelový problém. Funkční význam jednotlivých modelů se však odvíjí od vnitřního uspořádání AIM. Rozkladem rozšířené informační matice technikou LDL<sup>T</sup> faktorizace obdržíme

$$\mathcal{M}_k = L_{\mathcal{M}k} D_{\mathcal{M}k} L_{\mathcal{M}k}^T \quad (2.94)$$

V předchozím vztahu dolní index „ $\mathcal{M}$ “ odkazuje na faktor AIM  $\mathcal{M}_k$ . Důkladnou analýzou vlastností výsledného rozkladu (2.94) lze vyvodit, že jednotlivé produkty splňují následující schéma [30]

1.  $L_{\mathcal{M}k}$  je podle požadavku monická dolní trojúhelníková matice (monická znamená, že všechny její diagonální vstupy jsou jednotkové). Její transponovaná inverze nese značení  $\mathcal{U}_k = L_{\mathcal{M}k}^{-T}$  a je nazývána maticí parametrů

$$\mathcal{U}_k = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\alpha}_{1(k)}^{(1)} & \hat{\theta}_{1(k)}^{(1)} & \cdots & \hat{\theta}_{1(k)}^{(n-1)} & \hat{\alpha}_{1(k)}^{(n)} & \hat{\theta}_{1(k)}^{(n)} \\ & 1 & \hat{\theta}_{2(k)}^{(1)} & \cdots & \hat{\theta}_{2(k)}^{(n-1)} & \hat{\alpha}_{2(k)}^{(n)} & \hat{\theta}_{2(k)}^{(n)} \\ & & 1 & \cdots & \hat{\theta}_{3(k)}^{(n-1)} & \hat{\alpha}_{3(k)}^{(n)} & \hat{\theta}_{3(k)}^{(n)} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & \hat{\alpha}_{n-1,(k)}^{(n)} & \hat{\theta}_{n-1,(k)}^{(n)} \\ & & & & & 1 & \hat{\theta}_{n(k)}^{(n)} \\ & 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$



Matice parametrů  $\mathcal{U}_k$  obsahuje informace o všech procesních parametrech vzhledem ke zvolené struktuře a zvolenému nejvyššímu řádu modelu. Specifičtěji k modelu (2.85), každý lichý sloupec nese odhad parametrů dopředného modelu a každý sudý sloupec pak indexuje odhad pomocného zpětného modelu. Dopředný model využívá zpožděných hodnot vstupů a výstupů tak, aby jejich lineární kombinace odpovídala budoucí hodnotě výstupu. A naopak, zpětný model vytváří lineární kombinaci zpožděných vstupů a výstupů generující budoucí vstup. Zápis horního indexu u vektoru  $\hat{\theta}_k^{(i)}$  odpovídá řádu modelu a rozsahu datového měření ve významu  $\{u_j, y_j\}_{j=1-n}^{k-n+i}$ , které bylo využito pro nalezení tohoto odhadu. Podobně u vektoru  $\hat{\alpha}_k^{(i)}$  horní index specifikuje řád modelu a délku datového segmentu  $\{u_j, y_j\}_{j=1-n}^{k-n+i-1}$  na základě kterého byl model sestaven. Tedy, přímo odhad parametrů ARX modelu  $i$ -tého řádu využívající měření platná až do okamžiku  $k - n + i$   $\hat{\theta}_k^{(i)}$  je zaznamenám v  $(2i + 1)$ -tém sloupci matice  $\mathcal{U}_k$ , kde  $i \in [1, n]$ .

2. Diagonální matice  $D_{\mathcal{M}_k}$  bývá označována zápisem  $\mathcal{D}_k$

$$\mathcal{D}_k = \text{diag}[\mathcal{V}_{fk}^{(0)}(\hat{\theta}_k^{(0)}), \mathcal{V}_{bk}^{(1)}(\hat{\alpha}_k^{(1)}), \dots, \mathcal{V}_{fk}^{(n-1)}(\hat{\theta}_k^{(n-1)}), \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}), \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)})] \quad (2.96)$$

a je nazývána maticí kritériálních funkcí. Matice  $\mathcal{D}_k$  zaznamenává na svých diagonálních vstupech hodnoty kritériálních funkcí, které korespondují s  $p$  modely specifikovanými maticí  $\mathcal{U}_k$ . Tedy  $(2i + 1)$ -tý diagonální element  $\mathcal{V}_{fk}^{(i)}(\hat{\theta}_k^{(i)})$  matice  $\mathcal{D}_k$  vyjadřuje hodnotu penalizace, kterou kvadratická funkce nabývá pro dopředný model  $i$ -tého řádu s  $i \in [1, n]$ .

Popsaná varianta mnohamodelové estimace je postavena na obecném principu dopředného rozkladu problému nejmenších čtverců. Odlišnou technikou vedoucí na rozdílnou interpretaci procesních parametrů a jejich nezpožděné odhady v matici  $\mathcal{U}_k$  je princip zpětného rozkladu [31]. V rámci této práce bude podrobněji zkoumán a rozvíjen právě přístup dopředného rozkladu se symetrickou formou matice  $\mathcal{M}_k$ . Dosažené výsledky však budou jednoduše přenositelné i na druhou z uvedených variant.

Z prezentovaných vlastností přístupu mnohamodelové identifikace, konkrétně metody ALDI-LS je evidentní, že z dostupných dat extrahuje mnohem větší míru informace než obyčejná metoda nejmenších čtverců (LS), která poskytuje odhad pouze modelu nejvyššího ( $n$ -tého) řádu, zatímco ALDI-LS současně odhaduje modely všech řádů a to bez navýšení nároků kladených na výpočet [28]. Navíc u metody ALDI-LS není vyžadována apriorní znalost strukturních parametrů, tj. řád vyšetřovaného procesu. Postačuje pouze hrubé omezení na nejvyšší očekávaný řád modelu.

Nejvhodnější model pak může být vybrán na základě informace obsažené v matici kritériálních funkcí. Jak bude ukázáno v následující kapitole, metoda není citlivá na chybně zvolený, neúměrně vysoký řád modelu (přeparametrizování). Umožňuje proto volit dostatečně vysoký řád tak, aby pokryl skutečný řád procesu a případný vývoj ve strukturních parametrech, což je obzvláště výhodné v adaptivní estimaci. Z těchto důvodů lze mnohamodelový přístup doporučit jako všestrannější a efektivnější implementaci v porovnání s konvenčními metodami nejmenších čtverců.

Struktura ALDI-LS estimátoru podle (2.94) umožňuje dávkové zpracování dat. Nejdříve jsou zaznamenána všechna vstupně výstupní data a z nich je zkonstruována rozšířená informační matice (AIM). Následně  $LDL^T$  faktorizací AIM a řešením inverze monické dolní trojúhelníkové matice jsou nalezeny odhady procesních parametrů a jim odpovídající hodnoty kritériálních funkcí. V případě postupného získávání dat z procesu, při jeho dlouhodobém pozorování, lze paralelní mnohamodelový výpočet s využitím rozšířeného identifikačního schématu převést přímo na tvar rekurzivní obnovy  $UDU^T$  produktů matice  $\mathcal{C}_k$  ( $\mathcal{C}_k = U_{\mathcal{C}k} D_{\mathcal{C}k} U_{\mathcal{C}k}^T$ , kde dolní index „ $\mathcal{C}$ “ indikuje, že se jedná o faktory ACM  $\mathcal{C}_k$ ), tedy

$$\left[ U_{\mathcal{C}k} D_{\mathcal{C}k} U_{\mathcal{C}k}^T \right]^{-1} = \left[ U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \right]^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (2.97)$$

a protože platí vzájemná relace

$$U_{\mathcal{C}k} D_{\mathcal{C}k} U_{\mathcal{C}k}^T = L_{\mathcal{M}k}^{-T} D_{\mathcal{M}k}^{-1} L_{\mathcal{M}k}^{-1} \quad (2.98)$$

je  $U_{\mathcal{C}k}$  rovna hledané matici parametrů  $\mathcal{U}_k$  a diagonální vstupy matice  $D_{\mathcal{C}k}$  odpovídají převráceným hodnotám diagonálních vstupů matice kritériálních funkcí  $D_{\mathcal{C}k} = \mathcal{D}_k^{-1}$ . Rekurzivní implementaci rozšířené identifikace metodou nejmenších čtverců na bázi  $UDU^T$  rozkladu (AUDI-RLS), lze jednoduše zavést užitím Biermanovy  $UDU^T$  techniky [3] pro filtraci kovarianční matice

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{C}k} D_{\mathcal{C}k} U_{\mathcal{C}k}^T &= U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T - \frac{U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k \varphi_k^T U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T}{1 + \varphi_k^T U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k} \\ &= U_{\mathcal{C},k-1} \left[ D_{\mathcal{C},k-1} - \frac{(D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k) (D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k)^T}{1 + \varphi_k^T U_{\mathcal{C},k-1} D_{\mathcal{C},k-1} U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k} \right] U_{\mathcal{C},k-1}^T \\ &= U_{\mathcal{C},k-1} \left[ D_{\mathcal{C},k-1} - \frac{(D_{\mathcal{C},k-1} f_k) (D_{\mathcal{C},k-1} f_k)^T}{1 + f_k^T D_{\mathcal{C},k-1} f_k} \right] U_{\mathcal{C},k-1}^T \end{aligned} \quad (2.99)$$

kde pomocný vektor  $f_k$  je dán  $f_k = U_{\mathcal{C},k-1}^T \varphi_k$ . A protože výraz v hranatých závorkách ve výše položené rovnici bude vždy symetrický a pozitivně definitní, existuje numericky vyčíslitelný rozklad

$$\bar{U}_{\mathcal{C}k} \bar{D}_{\mathcal{C}k} \bar{U}_{\mathcal{C}k}^T = \left[ D_{\mathcal{C},k-1} - \frac{(D_{\mathcal{C},k-1} f_k) (D_{\mathcal{C},k-1} f_k)^T}{1 + f_k^T D_{\mathcal{C},k-1} f_k} \right] \quad (2.100)$$

Kombinací rovnic (2.99) a (2.100) získáme

$$U_{Ck} = U_{C,k-1} \bar{U}_{Ck} \quad (2.101)$$

$$D_{Ck} = \bar{D}_{Ck} \quad (2.102)$$

čímž v konečném důsledku docílíme rekurzivní obnovy rozšířené kovarianční matice s ohledem na vyšetřované produkty: matici parametrů a inverzně vzatou matici kritériálních funkcí [28]. Otázka adaptivní estimace metodou AUDI-RLS bude podrobně diskutována v navazující kapitole a to především z pohledu ocenění informačního obsahu v maticích AIM a ACM.

## 2.3 Shrnutí kapitoly

V této kapitole byly shrnuty některé známé postupy řešící otázku adaptivní estimace u lineárních metod nejmenších čtverců. Konceptně lze absenci určitosti ve vývoji parametrů kompenzovat navýšením nejistoty odhadovaných parametrů. Schopnost přizpůsobit se proměnnému stavu parametrů jednotlivé metody klasifikuje do dvou základních skupin: na metody s relativním a absolutním zapomínáním. Ve své podstatě se obvykle jedná o úpravu exponenciální nebo lineární (Kalmanovsky orientované) formy zapomínání. Tyto formy jsou navíc při splnění určitých předpokladů, viz vztahy (2.15) a (2.17), významově vzájemně převeditelné.

Ve vztahu k exponenciálnímu zapomínání byla matematicky formulována vzájemná spojitost mezi přístupy v textu označenými jako omezené exponenciální zapomínání založené na dekompozici kovarianční a dekompozici informační matice. Vzájemné propojení lze nalézt ve shodném způsobu dekompozice, která, jak bude dále ukázáno, má za daných podmínek (2.19), (2.20), (2.21) nebo (2.22), (2.23), (2.24) pro uvedený problém jediné řešení.

Flexibilitnost lineárního zapomínání umožňující sledování rozdílné rychlosti vývoje individuálních parametrů byla přenesena do konceptu exponenciálního zapomínání. Vznikla tak rekurzivní metoda nejmenších čtverců s mnohonásobným faktorem exponenciálního zapomínání (MEF-RLS), inspirovaná výsledky práce [41]. Pro teoretické navýšení schopnosti adaptace byla zavedena úprava umožňující pracovat na konečném datovém okně v rekurzivním klouzavém režimu učení (MEF-SW-RLS). Pro variantu s rostoucím datovým oknem bylo docíleno omezeného zapomínání. Avšak pro případ konečného datového okna bylo dokázáno, že mechanismus omezeného zapomínání (2.44) a (2.45) nemůže být v rekurzivním režimu korektně uplatněn.

Navzdory teoretickému předpokladu dosáhnout nejlepšího odhadu estimace (ve smyslu střední kvadratické chyby odhadu), je nasazení Kalmanova filtru na reálném procesu často značně limitováno v důsledku nedostatečně přesného popisu všech elementů v procesu vystupujících. Z tohoto důvodu vyvstává racionální požadavek na formulaci problému estimace, jako problému minimalizace reziduí mezi procesem a jeho modelem. Tato racionální myšlenka bude v práci dále rozvíjena a bude položen deterministický koncept optimalizace stavů (parametrů) v kontextu stochastického problému estimace.

Studiem struktury rozšířené identifikace umožňující mnohamodelovou paralelní estimaci lze konstatovat, že metoda představuje efektivnější reformulaci problému široce užívané metody nejmenších čtverců a současně produkuje mnohem více informací o vlastnostech procesu s vysokou numerickou spolehlivostí. Ve spojitosti s rozšířenou identifikací bude nalezena nová přirozeně interpretovatelná forma selektivního zapomínání s exaktním vztahem ke kriteriální funkci.

## Kapitola 3

# Rozšířená adaptivní identifikace a filtrace metodou nejmenších čtverců

Tato kapitola tvoří jádro celé práce. Budou zde podrobně diskutovány vlastnosti rozšířené identifikace metodou nejmenších čtverců (AI-LS) a její rekurzivní varianty AI-RLS jako nástroje univerzální implementace mnohamodelové adaptivní estimace. Současně zde bude rozveden přístup estimace vnitřního stavu stavové reprezentace obecného vstupně výstupního lineárního modelu. Optimální hodnoty stavů budou nalezeny řešením čistě deterministického kvadratického kritéria. Dané řešení ze známé struktury modelu zprostředkuje optimální odhad jeho stavů, a to bez nutnosti znalosti jednotlivých momentů stochastických složek. Výsledný optimalizační předpis bude využívat procesní informace koncentrované v AIM/ACM. Dále případ estimace vnitřních stavů obecného lineárního modelu přístupem rozšířené filtrace metodou nejmenších čtverců bude označován AF-LS.

Jak bylo ukázáno v kapitole 2, veškeré informace o procesních parametrech a hodnotách kritériálních funkcí (pro lineární problém nejmenších čtverců) jsou obsaženy v rozšířené informační (AIM), resp. kovarianční matici (ACM). Úlohou rozšířené identifikace a filtrace je na základě získaných pozorování produkovat tyto matice a plně extrahovat všechny dostupné informace v nich obsažené. Záměr uvést přístup rozšířené identifikace a filtrace bude zahrnovat následující kroky:

1. Princip rozšířené identifikace a filtrace jako prostředek minimalizující kvadratickou funkci s omezující podmínkou typu rovnost za účelem nalezení parametrů obecného vstupně výstupního lineárního modelu a jeho vnitřních stavů.

2. Sestavení faktorizované varianty rozšířené identifikace a filtrace s využitím  $LDL^T/UDU^T$  a  $SS^T$  (Choleského) produktů. Pro konstrukci dílčích produktů (faktorů) bude do struktury výpočtu zakomponována robustní vážená Gramova-Schmidtova a modifikovaná Gramova-Schmidtova [40] ortogonalizace.
3. Nalezení rekurzivního ekvivalentu k jednorázové rozšířené identifikaci a filtraci pro všechny popsané formy implementace.
4. Důkaz teorému o rozšířené identifikaci jako formy kvadraticky optimální mnohamodelové paralelní estimaci ve vztahu k modelu ARX a její numerické aspekty. Aplikace rozšířené identifikace na modely ARMAX a ARARMAX.
5. Začlenění konceptu selektivního zapomínání do schématu rozšířené identifikace vzhledem k relativnímu informačnímu přínosu dat. Tímto bude položen nový vzorec omezeného datově řízeného zapomínání.

### 3.1 Úvod

Většina systémů vyskytujících se v reálných aplikacích jsou časově variantní spojité procesy s nekonečnou dimenzí. Ovšem z důvodu číslicového zpracování jsou hodnoty signálu generovaného procesem měřeny v diskrétních časových okamžicích. Navíc, aby byl model systému prakticky použitelný, je nutné jej vyjádřit ve formě modelu s konečným počtem parametrů. Vhodným prostředkem pro popis vlastností procesu jsou lineární stochastické modely. Úloha identifikace procesu pak představuje nalezení nejlepších parametrů vyhovujících známé struktuře modelu. Problém nalezení parametrů modelu je tedy ve výsledku redukován na řešení pře určené inkonzistentní soustavy lineárních rovnic. Zápis takovéto soustavy pro determinovaný řád modelu v kompaktní vektorové formě je dán

$$Y_k = H_k \theta_k + E_k \quad (3.1)$$

kde vektor  $E_k \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  zahrnuje sekvenci neměřitelných, již dříve definovaných veličin  $e_k \sim \mathcal{N}(0; \sigma_e^2)$  zastupujících rušivý šum a nedokonalosti modelu

$$E_k = \begin{bmatrix} e_k & e_{k-1} & \cdots & e_1 \end{bmatrix}^T \quad (3.2)$$

Standardní dávková metoda nejmenších čtverců (LS) respektuje požadavek nalezení nejlepšího odhadu  $\hat{\theta}_k$  na základě minimalizace sumy kvadrátů rozdílů mezi měřenými daty (elementy vektoru pozorování) a jim odpovídajícím modelovaným hodnotám (odvozeným od vektoru parametrů)

$$\hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta_k} \|Y_k - H_k \theta_k\|_2^2 \quad (3.3)$$

kde zápis  $\|\cdot\|_2^2$  symbolizuje Euklidovskou vektorovou normu. Optimální hodnotu  $\hat{\theta}_k$  splňující požadavek úlohy (3.3) nalezneme, řešíme-li následující normálovou rovnici

$$H_k^T H_k \hat{\theta}_k = H_k^T Y_k \quad (3.4)$$

Za předpokladu regulárnosti výrazu  $H_k^T H_k$  hledané řešení triviálně obdržíme přímým výpočtem

$$\hat{\theta}_k = (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T Y_k \quad (3.5)$$

Protože výpočet inverze do značné míry vymezuje přesnost odhadu, a tím možnost uplatnění estimátoru, neprovádí se obvykle v praktických aplikacích explicitně. Místo toho je řešena normálová rovnice (3.4) s využitím vhodné formy faktorizace (rozkladu). Pro faktorizovanou metodu nejmenších čtverců na bázi  $LDL^T$  rozkladu s odvoláním na (3.4) řešíme

$$L_k z_k = H_k^T Y_k \quad (3.6)$$

$$D_k L_k^T \hat{\theta}_k = z_k \quad (3.7)$$

Nejdříve zpětnou substitucí hledáme vektor  $z_k$  a následně dopřednou substitucí získáme přímo odhad  $\hat{\theta}_k$ . Výpočet rozkladu  $H_k^T H_k$  může být řešen pomocí rozličných forem dekompozic, z nichž přístup využívající ortogonální transformace je často preferovanou variantou.

Zatímco původní metoda nejmenších čtverců poskytuje kvadraticky optimální řešení pouze soustavy rovnic podle (3.1), rozšířená identifikace metodou nejmenších čtverců současně hledá vektory parametrů všech řádů od 1. až po nejvyšší definovaný řád. Problém mnohamodelové identifikace popisuje systém simultánních rovnic, pro který v maticovém tvaru ve shodě s vyšetřovaným případem (2.94) platí

$$\Phi_k \mathcal{U}_k = [E_{fk}^{(0)}, E_{bk}^{(1)}, \dots, E_{fk}^{(n-1)}, E_{bk}^{(n)}, E_{fk}^{(n)}] \quad (3.8)$$

kde

$$E_{fk}^{(i)} = [e_{f,k+i-n} \quad e_{f,k+i-n-1} \quad \dots \quad e_{f,1+i-n}]^T \quad (3.9)$$

$$E_{bk}^{(i)} = [e_{b,k+i-n-1} \quad e_{b,k+i-n-2} \quad \dots \quad e_{b,i-n}]^T \quad (3.10)$$

Jednotlivé sloupcové vektory typu  $E_{fk}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  a  $E_{bk}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  pro  $i \in [1, n]$  zastupují časovou posloupnost rušivého signálu vstupujícího do dopředného respektive zpětného modelu  $i$ -tého řádu. Tedy každý vektor  $E_{fk}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  vytváří spolu s  $(2i + 1)$ -tým sloupцем matice  $\mathcal{U}_k$  a submaticí tvořenou prvními  $2i + 1$  sloupci matice  $\Phi_k$  skladbu rovnic identickou se soustavou (3.1) pro  $i$ -tý řád modelu  $\hat{\theta}_k^{(i)}$  s  $i \in [1, n]$ . Nejlepší

odhad všech systémových parametrů  $\mathcal{U}_k$  ve smyslu kvadratického kritéria získáme řešením

$$\mathcal{U}_k = \arg \min_{\mathcal{U}_k} \|\Phi_k \mathcal{U}_k\|_2^2 \quad (3.11)$$

kde  $\mathcal{U}_k$  splňuje požadavek (3.11), platí-li [31]

$$\mathcal{U}_k = L_{\mathcal{M}_k}^{-T} \quad (3.12)$$

Odtud je zřejmé, že problém standardní metody nejmenších čtverců (3.3) je pouze „podúlohou“ problému rozšířené identifikace metodou nejmenších čtverců. Metoda rozšířené identifikace je tedy mnohem komplexnější postup vyšetřující povahu systému. Její přídatnou hodnotou oproti standardní metodě je informace o parametrech všech řádů. Tyto odhady jsou navíc v určitém směru vzájemně provázané. Odhady parametrů vyšších řádů jsou odvozeny od výsledků estimace parametrů nižších řádů [28], nikoliv však naopak. Současně je ke všem parametrům dostupné jejich kvalitativní ohodnocení v matici kritériálních funkcí  $\mathcal{D}_k$ , čímž je zprostředkovaně umožněno vyšetření vhodného řádu modelu, který nejlépe vystihuje charakter procesu. Struktura rozšířené identifikace v sobě integruje řadu užitečných vlastností a současně zachovává výpočetní náročnost standardní metody nejmenších čtverců.

Jestliže má proces vlastnosti časově variantního systému, algoritmus identifikace vyžaduje začlenění určité formy zapomínání. Podstatou zapomínání je vhodným způsobem potlačovat význam starších dat, čímž je kladen větší důraz na novější informace reprezentující aktuální dynamické vlastnosti procesu. Časové změny ve vývoji parametrů mohou být rovněž podmíněny nelineární povahou procesu. Lineární popis pak poskytuje pouze určitou aproximaci procesu v blízkosti pracovního bodu a změna parametrů modelu může být vyvolána případnou změnou provozních podmínek procesu. Omezíme-li se na klasické exponenciální zapomínání, časový krok vývoje kritériální funkce představuje zápis

$$\mathcal{V}_{k+1|k}(\theta_{k+1}) = \lambda_e \mathcal{V}_{k|k}(\theta_k) \quad (3.13)$$

Vztah (3.13) popisuje jednotné exponenciální zapomínání veškeré akumulované informace nezávisle na jejím informačním významu. Výhodnější strategií je zapomínat pouze tu část hodnoty funkce, řekněme  $\mathcal{V}_{2,k|k}(\theta_k)$ , která není informativní vzhledem k aktualizaci v datovém kroku výpočtu, tedy

$$\mathcal{V}_{k+1|k}(\theta_{k+1}) = \mathcal{V}_{1,k|k}(\theta_k) + \lambda_e \mathcal{V}_{2,k|k}(\theta_k) \quad (3.14)$$

Cílem práce proto bude nalézt vhodný způsob dekompozice kritériální funkce na její informativní a neinformativní část a zapomínání aplikovat pouze ve směru příchozí



informace v datovém kroku výpočtu. Nalezení exaktního řešení takto dekomponovaného problému bude současně propojeno s požadavkem na rozšířenou identifikaci přirozeně vedoucí na mnohamodelovou estimaci. Ve srovnání s (3.14), současná schémata omezeného zapomínání představují vždy pouze dodatečnou úpravu časového kroku vývoje kovarianční, popř. informační matice s absencí exaktní návaznosti na kritériální funkci.

## 3.2 Rozšířená identifikace a filtrace v dávkovém režimu učení

Za účelem propojení přístupů rozšířené identifikace a filtrace s problémem nejmenších čtverců uveďme následující teorémy [43]. Poznamenejme, že v kontextu obou teorémů bude matice  $D_b$  značit blokově diagonální matici.

**Teorém 1 ( $UD_bU^T$  rozklad symetrické blokové matice)** *Nechť existuje symetrická pozitivně definitní po blocích složená matice dimenze  $(p+1) \times (p+1)$ , pak  $UD_bU^T$  rozklad tohoto systému matic je dán*

$$\begin{bmatrix} R & x \\ x^T & Z \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} = \begin{bmatrix} I & xZ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R - xZ^{-1}x^T & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Z^{-1}x^T & I \end{bmatrix}$$

s  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  a  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Výraz  $R - xZ^{-1}x^T$  bývá označován jako Schurův doplněk k pozitivně definitní matici  $Z$ .

**Teorém 2 ( $LD_bL^T$  rozklad symetrické blokové matice)** *Nechť existuje symetrická pozitivně definitní po blocích složená matice dimenze  $(p+1) \times (p+1)$ , pak  $LD_bL^T$  rozklad tohoto systému matic je dán*

$$\begin{bmatrix} R & x \\ x^T & Z \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ x^T R^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Z - x^T R^{-1}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & R^{-1}x \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

s  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  a  $Z \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Výraz  $Z - x^T R^{-1}x$  bývá označován jako Schurův doplněk k pozitivně definitní matici  $R$ .

Oba výše položené teorémy lze jednoduše dokázat přímým výpočtem jejich pravých stran. Rozkladu blokové matice na součin trojúhelníkových matic a matice blokově diagonální může být použito k nalezení inverze blokové matice. Pro případ  $UD_bU^T$

rozkladu obdržíme výpočet inverze podle

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R & x \\ x^T & Z \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -Z^{-1}x^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R - xZ^{-1}x^T)^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -xZ^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (R - xZ^{-1}x^T)^{-1} & -(R - xZ^{-1}x^T)^{-1}xZ^{-1} \\ -Z^{-1}x^T(R - xZ^{-1}x^T)^{-1} & Z^{-1} + Z^{-1}x^T(R - xZ^{-1}x^T)^{-1}xZ^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Při řešení inverze  $LD_bL^T$  rozkladu blokové matice postupujeme analogicky s předchozím případem a ve výsledku získáme

$$\begin{bmatrix} R & x \\ x^T & Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} + R^{-1}x(Z - x^TR^{-1}x)^{-1}x^TR^{-1} & -R^{-1}x(Z - x^TR^{-1}x)^{-1} \\ -(Z - x^TR^{-1}x)^{-1}x^TR^{-1} & (Z - x^TR^{-1}x)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Porovnáním výsledků (3.15) a (3.16) nalezneme maticovou identitu známou jako lemma o inverzi matice

$$(R - xZ^{-1}x^T)^{-1} = R^{-1} + R^{-1}x(Z - x^TR^{-1}x)^{-1}x^TR^{-1} \quad (3.17)$$

Maticová identita (3.17) nachází své uplatnění, jak už bylo ukázáno, např. ve vztahu pro rekurzivní aktualizaci kovarianční matice. Pravá strana identity (3.17) snižuje výpočetní náročnost strany levé u obecně běžnějšího modelu, kdy počet sloupců matice  $x$  je nižší než počet řádků této matice.

### 3.2.1 Rozšířená identifikace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Předpokládejme následující optimalizační problém

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \|\theta_k - \hat{\theta}_0\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right)P_0^{-1}}^2 + \|Y_k - H_k\theta_k\|_{Q_k}^2 + \|\varrho^{-1}\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right)}^2 \quad (3.18)$$

kde regularizační členy splňují  $P_0 = \varrho^2 I$  a čtvercová matice  $Q_k$  je ve tvaru

$$Q_k = \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_e^{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

První omezující podmínka vystupující ve funkci (3.18) svázaná s počáteční hodnotou  $\hat{\theta}_0$  kompenzuje nedostatečnost vybuzení s cílem odstranit nejednoznačnost v poloze

odhadu. Tedy nejméně do okamžiku  $p$ -tého měření ( $\theta_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ), typicky soustava rovnic (3.1) je podurčená, musí výraz  $\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1}$  být nenulový. Nenulovost výrazu  $\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1}$  tak zajišťuje, že kritériální funkce (3.18) nebude nabývat stejné hodnoty pro rozdílný soubor parametrů, a tím i existenci inverze informační matice. Protože schéma rozšířené identifikace v kompaktním tvaru vyjma odhadu parametrů modelu současně produkuje hodnotu kritériální funkce, vyžadujeme existenci inverze této funkce (resp. její nenulovou hodnotu). Z tohoto důvodu v sobě funkce (3.18) zahrnuje člen  $\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) \varrho^{-1}$ . Přidáním tohoto členu evidentně neměníme polohu equilibria (je nezávislý na parametrech), ale pouze aditivně měníme hodnotu funkce v bodě equilibria. Nenulová hodnota funkce (3.18) tak spolu s dostatečnou perzistencí v konečném důsledku umožňuje výpočet inverze rozšířené informační matice (AIM) a její jednoznačnou faktorizaci. Poznamenejme, že spolu s požadavkem snižování vlivu starších dat, neboť nová pozorování považujeme za více relevantní než ta stará, současně s  $0 < \lambda_e < 1$  snižujeme význam regularizace.

Pro potřeby dalšího odvození upravíme kvadratickou formu (3.18) na úplný čtverec [43]. Jednotlivé členy funkce přepíšeme do tvaru

$$\|\theta_k - \hat{\theta}_0\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1}}^2 = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ -\hat{\theta}_0^T & \end{bmatrix} \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1} \begin{bmatrix} I & -\hat{\theta}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\|Y_k - H_k \theta_k\|_{Q_k}^2 = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_k^T \\ Y_k^T \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} -H_k & Y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\|\varrho^{-1}\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right)}^2 = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) \varrho^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Odtud zápis (3.18) nahradíme

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}_k \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Aby předchozí kvadratická forma odpovídala kvadratické formě (3.18), musí pro rozšířenou informační matici platit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k = & \begin{bmatrix} \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1} & -\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 \\ -\hat{\theta}_0^T \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1} & \hat{\theta}_0^T \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) \varrho^{-2} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} H_k^T Q_k H_k & -H_k^T Q_k Y_k \\ -Y_k^T Q_k H_k & Y_k^T Q_k Y_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Výše položený zápis  $\mathcal{M}_k$  vlastně představuje blokovou matici

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} R_k & x_k \\ x_k^T & Z_k \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

kde jednotlivé submatice jsou určený jako

$$R_k = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1} + H_k^T Q_k H_k \quad (3.26)$$

$$x_k = - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 - H_k^T Q_k Y_k \quad (3.27)$$

$$Z_k = \hat{\theta}_0^T \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + Y_k^T Q_k Y_k \quad (3.28)$$

Faktorizací matice  $\mathcal{M}_k$  s využitím  $\text{LD}_b L^T$  rozkladu (Teorém 2 na straně 40) převedeme funkci (3.18) do vhodnějšího tvaru zápisu pro vyšetřování svého minima, které může nabývat vzhledem k působení vektoru  $\theta_k$ , a to

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = (Z_k - x_k^T R_k^{-1} x_k) + (x_k^T R_k^{-1} + \theta_k^T) R_k (R_k^{-1} x_k + \theta_k) \quad (3.29)$$

Zatímco první člen v (3.29) volbou argumentu  $\theta_k$  nelze ovlivnit, je-li matice  $R_k$  pozitivně definitní, potom druhý člen bude vždy nezáporný a jeho hodnota závisí pouze na argumentu  $\theta_k$ . Za těchto podmínek dosáhneme absolutního minima, položíme-li

$$\hat{\theta}_k = -R_k^{-1} x_k \quad (3.30)$$

a minimum kritériální funkce (3.29) v bodě equilibria tak bude

$$\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) = \min_{\theta_k} \mathcal{V}_k(\theta_k) = Z_k + x_k^T \hat{\theta}_k \quad (3.31)$$

Odtud můžeme dokázat, že matice  $\mathcal{M}_k$  v sobě akumuluje informaci o hledaném řešení

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &= \begin{bmatrix} R_k & x_k \\ x_k^T & Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\theta}_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\hat{\theta}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_k & -R_k \hat{\theta}_k \\ -\hat{\theta}_k^T R_k & \hat{\theta}_k^T R_k \hat{\theta}_k + \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Abychom zajistili kompaktnost výpočtu, která je charakteristickým prvkem rozšířené identifikace zajišťující mnohamodelovou paralelní estimaci. Nepoužijeme k přímé extrakci vyšetřovaného vektoru  $\hat{\theta}_k$  a stavu hodnoty funkce  $\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k)$  výpočty (3.30) a (3.31) svázané se submaticemi vystupujícími v  $\mathcal{M}_k$ , ale namísto toho řešíme ucelený výpočet

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k &= \begin{bmatrix} R_k & x_k \\ x_k^T & Z_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \hat{\theta}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k & 0 \\ 0 & (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{\theta}_k^T & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P_k + \hat{\theta}_k (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \hat{\theta}_k^T & \hat{\theta}_k (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \\ (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \hat{\theta}_k^T & (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Připomeňme, že  $C_k = \mathcal{M}_k^{-1}$  a  $P_k = R_k^{-1}$ . Vztah (3.33) pak definuje dávkovou variantu rozšířené identifikace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním (EF-AI-LS). Ačkoliv schéma výpočtu podle (3.33) v porovnání s (3.30) a (3.31) na první pohled nepřináší specifický praktický význam, takto získané řešení má vlastnost mnohamodelové estimace a vhodnou formulací vektoru pozorování můžeme nalézt všechny modely nižších řádů. Tento aspekt rozšířené identifikace bude později v textu podrobněji diskutován.

### 3.2.2 Rozšířená filtrace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Vnitřní popis časově variantního obecného lineárního stochastického modelu je dán rovnicemi

$$\theta_{k+1} = A_k \theta_k + B_k u_k + G_k e_k \quad (3.34)$$

$$y_k = C_k \theta_k + e_k \quad (3.35)$$

Naším požadavkem je nyní získat odhady neměřitelné stavové veličiny  $\hat{\theta}_k$  vyhovující známé struktuře modelu na základě měřené sekvence vstupně výstupních dat  $\{u_k, y_k\}$ . Problém je vlastně zobecněným zadáním řešené úlohy z předchozího odstavce, kde platilo  $A_k = I$ ,  $B_k = 0$ ,  $G_k = 0$ ,  $C_k = h_k$ . Protože model procesu je obvykle zatížen určitou mírou nepřesnosti, která je výsledkem účelného zjednodušení a aproximací skutečných vlastností, silná důvěra ve správnost modelu může vyústit v nereálné odhady stavů. V případě, kdy filtr přiřazuje všem pozorováním stejnou váhu, odhad stavů do značné míry závisí na minulém pozorování, které však může být zcela degradováno chybným modelem procesu. Vysoká závislost na datech z minulosti, pak může vyústit až v divergenci v odhadování [12]. Za účelem korektního průběhu estimace vyžaduje filtr techniku eliminující význam starších dat na nové odhady stavů, jestliže už tyto pozbývají významu z důvodu nepřesně sestrojeného modelu.

V porovnání s popisem stavového modelu podle (2.74) ve stavové rovnici (3.34) nevystupuje stochastická složka šumu  $v_k$ . Tato veličina reprezentuje neurčitost vývoje stavové rovnice přechodu a v optimalizačním návrhu obvykle indukují techniku lineárního zapomínání. Protože se však jedná o prostředek absolutního zapomínání necitlivého na hodnotu měřené informace, bude snižování vlivu starších měření, a tím navyšování nejistoty odhadů, dosaženo s využitím relativního exponenciálního zapomínání. Z důvodu absence veličiny  $v_k$  je šum  $e_k$  jediným zdrojem stochastické

složky ve stavovém modelu (3.34), (3.35). Tímto je umožněno vyjádřit šum  $e_k$  z výstupní rovnice (3.35) a výsledek dosadit do rovnice stavové (3.34). Stavová rovnice se touto úpravou převede do tvaru

$$\theta_{k+1} = F_k \theta_k + B_k u_k + G_k y_k \quad (3.36)$$

$$F_k = A_k - G_k C_k \quad (3.37)$$

Po této úpravě stavová rovnice není dále explicitně zatěžována šumem. Ve své podstatě jsme provedli dekorelaci šumu stavu a šumu výstupu. Abychom mohli provádět rekonstrukci stavového vektoru, potřebujeme modelovat jeho zpětný vývoj od současně platného okamžiku  $k$  až do okamžiku započetí měření. Na základě struktury modelu (3.36) sestavíme zpětný běh  $\theta_k$  ve tvaru

$$\theta_i = \left( \prod_{j=1}^{k-i} F_{j+i-1}^{-1} \right) \theta_k - \sum_{l=1}^{k-i} \left( \prod_{j=1}^{k-l-i+1} F_{j+i-1}^{-1} \right) (B_{k-l} u_{k-l} + G_{k-l} y_{k-l}) \quad i \leq k \quad (3.38)$$

Současně v každém kroku vyhodnocujeme výstup generovaný modelem

$$y_i = C_i \theta_i + e_i \quad (3.39)$$

S odvoláním na (3.38), (3.39) můžeme specifikovat relaci platnou mezi dávkou vstupních  $\{u_i\}_{i=1}^k$  a výstupních dat  $\{y_i\}_{i=1}^k$  a sekvencí  $\{e_i\}_{i=1}^k$  v kompaktním tvaru

$$Y_k = \mathcal{R}_k \theta_k - \mathcal{L}_k U_k - \mathcal{K}_k Y_k + E_k \quad (3.40)$$

a tomu příslušné matice

$$U_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_1 \end{bmatrix} \quad Y_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} \quad E_k = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k-1} \\ e_{k-2} \\ \vdots \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathcal{R}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k-1} F_{k-1}^{-1} \\ C_{k-2} F_{k-2}^{-1} F_{k-1}^{-1} \\ \vdots \\ C_1 \left( \prod_{j=1}^{k-1} F_j^{-1} \right) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathcal{L}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{k-1}F_{k-1}^{-1}B_{k-1} & 0 & & 0 \\ 0 & C_{k-2}F_{k-2}^{-1}F_{k-1}^{-1}B_{k-1} & C_{k-2}F_{k-2}^{-1}B_{k-2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & C_1 \left( \prod_{j=1}^{k-1} F_j^{-1} \right) B_{k-1} & C_1 \left( \prod_{j=1}^{k-2} F_j^{-1} \right) B_{k-2} & \cdots & C_1 F_1^{-1} B_1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathcal{K}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{k-1}F_{k-1}^{-1}G_{k-1} & 0 & & 0 \\ 0 & C_{k-2}F_{k-2}^{-1}F_{k-1}^{-1}G_{k-1} & C_{k-2}F_{k-2}^{-1}G_{k-2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & C_1 \left( \prod_{j=1}^{k-1} F_j^{-1} \right) G_{k-1} & C_1 \left( \prod_{j=1}^{k-2} F_j^{-1} \right) G_{k-2} & \cdots & C_1 F_1^{-1} G_1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Na matici  $\mathcal{R}_k$  bude dále odkazováno jako na rozšířenou matici rekonstruovatelnosti. Rovnice (3.40) lineární kombinací propojuje působení vektorů složených z měřených vstupů  $U_k$ , výstupů  $Y_k$ , neměřitelných rušivých signálů  $E_k$  a neznámých aktuálních hodnot stavů  $\theta_k$  spolu s maticemi  $\mathcal{R}_k$ ,  $\mathcal{L}_k$  a  $\mathcal{K}_k$  odvozenými od systémových matic  $(F_k, B_k, G_k, C_k)$  s výstupními hodnotami modelu. Zápis (3.40) popisuje inkonzistentní soustavu lineárních rovnic a představuje tak klasickou formulaci problému nejmenších čtverců vzhledem ke hledanému parametru  $\theta_k$ . Pro zajištění jednoznačné polohy řešení, alespoň pro prvních  $n$ -kroků výpočtu ( $\theta_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ), volíme omezující podmínku penalizující vzdálenost

$$\left\| \theta_0 - \hat{\theta}_0 \right\|_{\left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1}}^2 \quad (3.45)$$

kde  $\theta_0$  je hledaný parametr na počátku měření a  $\hat{\theta}_0$  je jeho odhad. Předchozí vztah může být modifikován s využitím zpětného vývoje stavové rovnice (3.38), kde pro  $i = 0$  obdržíme závislost

$$\theta_0 = \left( \prod_{j=1}^k F_{j-1}^{-1} \right) \theta_k - \sum_{l=1}^k \left( \prod_{j=1}^{k-l+1} F_{j-1}^{-1} \right) (B_{k-l} u_{k-l} + G_{k-l} y_{k-l}) \quad (3.46)$$

Dosazením výsledku (3.46) za  $\theta_0$  do vztahu (3.45) a následným osamostatněním hledaného vektoru  $\theta_k$ , z důvodu navazujících matematických operací, (3.45) přepíšeme do tvaru

$$\left\| \theta_0 - \hat{\theta}_0 \right\|_{\left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1}}^2 = \left\| \theta_k - \hat{\theta}_k \right\|_{\left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1}}^2 \quad (3.47)$$

kde pomocný vektor  $\hat{o}_k$  odpovídá přímému vývoji (simulaci) počátečního odhadu  $\hat{\theta}_0$  ve shodě s rovnicí (3.36)

$$\hat{o}_k = \left( \prod_{j=1}^k F_{k-j} \right) \hat{\theta}_0 + \sum_{l=1}^k \left( \prod_{j=1}^{k-l} F_{k-j} \right) (B_{l-1}u_{l-1} + G_{l-1}y_{l-1}) \quad (3.48)$$

a pomocná matice  $O_k^{-1}$  představuje časové šíření počátečního nastavení informační matice

$$O_k^{-1} = \left( \prod_{j=1}^k F_{j-1}^{-1} \right)^T P_0^{-1} \left( \prod_{j=1}^k F_{j-1}^{-1} \right) \quad (3.49)$$

Cílem kvadraticky optimální estimace je v konečném důsledku dosáhnout vhodným laděním parametrů vybělení chyby predikce modelu. V takovém případě totiž difference mezi modelovanými a měřenými výstupy (je-li souhlasně buzen model a proces) tvoří bílou posloupnost  $\{e_k\}$ . Pro ocenění kvality modelu proto porovnáváme hodnoty modelovaných výstupů (predikcí) s měřenými výstupy podle kritériální funkce (3.50)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\theta_k) = & \|\theta_k - \hat{o}_k\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) O_k^{-1}}^2 + \\ & + \|Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k - \mathcal{R}_k \theta_k\|_{Q_k}^2 + \|\varrho^{-1}\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right)}^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Přidané omezující podmínky, specifitěji vážená difference mezi hledaným stavem a časovým vývojem počátečního odhadu stavu pak spolu s aditivním členem navyšujícím hodnotu funkce musí zajistit jednoznačnost výsledku v prvních  $n$ -krocích výpočtu. Konstrukce funkce (3.50) je významově identická s případem funkce (3.18). Hodnoty regularizačních členů opět volíme podle  $P_0 = \varrho^2 I$ .

Abychom mohli uplatnit přístup rozšířené identifikace, jednotlivé kvadratické členy vystupující v (3.50) přepíšeme

$$\|\theta_k - \hat{o}_k\|_{\left(\prod_{j=1}^k \lambda_e\right) O_k^{-1}}^2 = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\hat{o}_k^T \end{bmatrix} \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \begin{bmatrix} I & -\hat{o}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & \|Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k - \mathcal{R}_k \theta_k\|_{Q_k}^2 = \\ & = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_k^T \\ (Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k)^T \end{bmatrix} Q_k \begin{bmatrix} -\mathcal{R}_k & Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$



$$\|\varrho^{-1}\|^2 \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Dosadíme-li dílčí úpravy (3.51), (3.52) a (3.53) zpět do funkce (3.50), pak ve výsledku obdržíme známou strukturu zápisu kritériální funkce s rozšířenou kovarianční maticí  $\mathcal{M}_k$

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}_k \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Matice  $\mathcal{M}_k$  pak může být chápána jako po blocích složená matice

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} R_k & x_k \\ x_k^T & Z_k \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

kde jednotlivé submatice jsou dány

$$R_k = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} + \mathcal{R}_k^T Q_k \mathcal{R}_k \quad (3.56)$$

$$x_k = - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \hat{o}_k - \mathcal{R}_k^T Q_k (Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} Z_k &= \hat{o}_k^T \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \hat{o}_k + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \\ &+ (Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k)^T Q_k (Y_k + \mathcal{L}_k U_k + \mathcal{K}_k Y_k) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Strategie řešení optimalizačního problému (3.54) je až na vlastní uspořádání matic  $R_k$ ,  $x_k$  a  $Z_k$  zcela totožná s vyšetřovaným případem (3.23) a vede na charakteristickou formu funkce ve tvaru úplného čtverce

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \left( Z_k - x_k^T R_k^{-1} x_k \right) + \left( x_k^T R_k^{-1} + \theta_k^T \right) R_k \left( R_k^{-1} x_k + \theta_k \right) \quad (3.59)$$

Minimalizací kvadratické formy vzhledem k  $\theta_k$  získáme za předpokladu pozitivní definitnosti  $R_k$  pro optimální odhad vztah

$$\hat{\theta}_k = -R_k^{-1} x_k \quad (3.60)$$

a tomu odpovídá minimální hodnota, kterou funkce nabývá v závislosti na argumentu  $\theta_k$

$$\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) = \min_{\theta_k} \mathcal{V}_k(\theta_k) = Z_k + x_k^T \hat{\theta}_k \quad (3.61)$$

Úplné řešení problému je opět obsaženo v matici  $\mathcal{M}_k$

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} R_k & -R_k \hat{\theta}_k \\ -\hat{\theta}_k^T R_k & \hat{\theta}_k^T R_k \hat{\theta}_k + \mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Sestavením inverzní matice k matici  $\mathcal{M}_k$  ( $\mathcal{M}_k^{-1} = \mathcal{C}_k$ ) můžeme přímo odečíst převrácenou minimální hodnotu funkce (3.54) a následně dělením pravého sloupce matice  $\mathcal{C}_k$  touto hodnotou, indexujeme hledaný parametr  $\hat{\theta}_k$

$$\mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} P_k + \hat{\theta}_k (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \hat{\theta}_k^T & \hat{\theta}_k (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \\ (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \hat{\theta}_k^T & (\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k))^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Nalezením rozšířené kovarianční matice  $\mathcal{C}_k$  je ukončen popis dávkového výpočtu rozšířené filtrace metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním (EFAF-LS). Pro účely dlouhodobého pozorování procesu lze zápis (3.63) ekvivalentně nahradit algebraickou rekurzí.

V kontrastu s klasickým konceptem Kalmanova filtru je navržené schéma filtrace schopné pracovat v dávkovém režimu učení. Sestavení metody není vyžadováno technikou dynamické optimalizace. Ačkoliv se v této práci budeme výhradně zabývat lineárními modely, poznamenejme, že statická optimalizace může být výhodná v případech, kdy vyšetřovaný model má významně nelineární charakter a požadavek na minimalizaci kvadratické chyby predikce je spojen s přístupem lokální aproximace na základě linearizovaného modelu procesu v okolí nejlepšího dostupného odhadu. Rekurzivní aktualizace pak značně zjednodušuje postup řešení z důvodu neumožnění dodatečného zpřesnění na odhadovaných parametrech závislé akumulované informace (viz rozšířený Kalmanův filtr [36]).

### 3.2.3 Minimalizace kvadratické formy s využitím $\text{LDL}^T$ produktů rozšířené informační matice

V předchozích kapitolách jsme odvodili, že hledané řešení kvadratické formy je obsaženo v rozšířené informační matici (AIM). Vyšetření hledaných parametrů a hodnoty kritériální funkce obnášelo sestavení rozšířené kovarianční matice (ACM) inverzní k matici AIM. Abychom se vyhnuli přímému výpočtu inverze AIM nezbytného pro zjištění argumentu minimalizujícího funkci (3.64)

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}_k \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

zavedeme předpoklad, že rozšířená kovarianční matice  $\mathcal{C}_k$  je dána svými  $U_{\mathcal{C}_k} D_{\mathcal{C}_k}$  faktory (produkty) ve tvaru

$$\mathcal{C}_k = U_{\mathcal{C}_k} D_{\mathcal{C}_k} U_{\mathcal{C}_k}^T \quad (3.65)$$

kde  $U_{Ck}$  je monická horní trojúhelníková matice,  $D_{Ck}$  je matice diagonální. Matice  $U_{Ck}$  a  $D_{Ck}$  rozdělíme na bloky

$$U_{Ck} = \begin{bmatrix} U_{C1(k)} & U_{C2(k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$D_{Ck} = \begin{bmatrix} D_{C1(k)} & 0 \\ 0 & D_{C2(k)} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Dimenze submatic, je-li  $\theta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ , je volena s ohledem na  $U_{C1(k)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $U_{C2(k)} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ,  $D_{C1(k)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $D_{C2(k)} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Potom kritériální funkce (3.64) s využitím (3.65) je rovna

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} U_{Ck}^{-T} D_{Ck}^{-1} U_{Ck}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Inverzi monické trojúhelníkové a diagonální matice sestavíme jednoduše podle

$$U_{Ck}^{-1} = \begin{bmatrix} U_{C1(k)}^{-1} & -U_{C1(k)}^{-1} U_{C2(k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$D_{Ck}^{-1} = \begin{bmatrix} D_{C1(k)}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{C2(k)}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Odtud kvadratickou formu (3.68) zapíšeme jako

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\theta_k) &= \\ &= \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1(k)}^{-T} & 0 \\ -U_{C2(k)}^T U_{C1(k)}^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{C1(k)}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{C2(k)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C1(k)}^{-1} & -U_{C1(k)}^{-1} U_{C2(k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= (\theta_k^T - U_{C2(k)}^T) U_{C1(k)}^{-T} D_{C1(k)}^{-1} U_{C1(k)}^{-1} (\theta_k - U_{C2(k)}) + D_{C2(k)}^{-1} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Jestliže existuje výraz  $U_{C1(k)}^{-T} D_{C1(k)}^{-1} U_{C1(k)}^{-1}$ , pak tento bude mít vždy vlastnosti pozitivně definitní symetrické matice. Výše položená kvadratická forma bude minimální vzhledem k vektoru  $\theta_k$ , volíme-li [4]

$$\hat{\theta}_k = U_{C2(k)} \quad (3.72)$$

Minimum kvadratické formy je jediné a je určeno rovnicí

$$\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) = \min_{\theta_k} \mathcal{V}_k(\theta_k) = D_{C2(k)}^{-1} \quad (3.73)$$

Protože produkt  $U_{Ck}$  vystupující v (3.68) je vlastně hledanou maticí, musíme nalézt relaci svazující  $U_{Ck}$  s vhodně zvoleným produktem matice  $\mathcal{M}_k$ . Jako vhodný příklad se nabízí rozklad

$$\mathcal{M}_k = L_{\mathcal{M}k} D_{\mathcal{M}k} L_{\mathcal{M}k}^T \quad (3.74)$$

kde  $D_{\mathcal{M}k}$  je diagonální matice,  $L_{\mathcal{M}k}$  je monická dolní trojúhelníková matice.  $L_{\mathcal{M}k}$  vyjádříme pomocí submatic

$$L_{\mathcal{M}k} = \begin{bmatrix} L_{\mathcal{M}1(k)} & 0 \\ L_{\mathcal{M}2(k)} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Pro hledaný vektor  $\hat{\theta}_k$  pak ve vztahu s produktem  $L_{\mathcal{M}k}$  zřejmě platí

$$\begin{bmatrix} U_{\mathcal{C}1(k)} & \hat{\theta}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathcal{M}1(k)}^{-T} & -L_{\mathcal{M}1(k)}^{-T} L_{\mathcal{M}2(k)}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Požadavek na přímé řešení inverze  $\mathcal{M}_k^{-1}$  je tak s využitím  $\text{LDL}^T$  faktorizace matice  $\mathcal{M}_k$  převeden na úlohu  $L_{\mathcal{M}k}^{-T}$ . Porovnáním dosažených výsledků (3.73) a (3.76) lze konstatovat, že ve shodě s popisovanými vlastnostmi přístupu mnohamodelové identifikace na bázi  $\text{LDL}^T$  rozkladu (2.94), sloupec matice  $L_{\mathcal{M}k}^{-T}$  na pozici  $p+1$  uchovává vyšetřovaný vektor parametrů modelu minimalizující symetrickou kvadratickou formu (3.64) a  $p+1$  vstup matice  $D_{\mathcal{M}k}$  umožňuje přímé odečtení minimální hodnoty této kvadratické formy, kterou pro daný model nabývá. Dodržíme-li příslušné schéma uspořádání jednotlivých pozorování z procesu, pak  $U_{\mathcal{C}1(k)}$  současně uchovává optimální odhady modelů všech nižších řádů.

Za účelem sestavení produktů  $\text{LDL}^T$  obecné symetrické vážené kvadratické formy, bude představena ortogonální transformace výhodná z hlediska počtu operací i numerických vlastností. Algoritmus v literatuře nese pojmenování vážená Gramova-Schmidtova ortogonalizace (WGS).

Algoritmus WGS řeší problém  $\text{LDL}^T$  faktorizace ve tvaru

$$\begin{aligned} LDL^T &= W\widehat{D}W^T = \\ &= LV\widehat{D}(LV)^T \end{aligned} \quad (3.77)$$

kde  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pro  $m \leq n$  není monická dolní (popř. horní) trojúhelníková matice a čtvercová symetrická matice  $\widehat{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nemusí být maticí diagonální. Požadavkem je transformovat matici  $W$  na součin  $LV$  tak, aby platilo

$$D = V\widehat{D}V^T \quad (3.78)$$

Pro transpozice matic  $W$  a  $V$  píšeme

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1^T & \omega_2^T & \cdots & \omega_m^T \end{bmatrix}^T \quad (3.79)$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & \cdots & v_m^T \end{bmatrix}^T \quad (3.80)$$

Hledáme soubor vektorů  $\{v_j\}_{j=1}^m$  které jsou  $\widehat{D}$ -ortogonální, tedy musí splňovat

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \widehat{D} \begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T & \cdots & v_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \widehat{D} v_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 \widehat{D} v_2^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & v_m \widehat{D} v_m^T \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Dále předpokládáme, že řádkové vektory matice  $V$  jsou v určitém smyslu odvozeny od řádkových vektorů matice  $W$ . Vyšetřování algoritmu WGS začneme vyjádřením vážených skalárních součinů (vážené maticí  $\widehat{D}$ ) v prvním řádku matice (3.81). Pro první index volíme

$$v_1 \widehat{D} v_1^T = \omega_1 \widehat{D} \omega_1^T \quad (3.82)$$

Vektor  $v_2$  zkonstruujeme s ohledem na požadavky  $v_1 \widehat{D} v_1^T = \omega_1 \widehat{D} \omega_1^T$  a  $v_2 \widehat{D} v_2^T \neq 0$

$$v_1 \widehat{D} v_2^T = 0 = v_1 \widehat{D} \underbrace{\left( \omega_2^T - v_1^T \frac{v_1 \widehat{D} \omega_2^T}{v_1 \widehat{D} v_1^T} \right)}_{v_2^T} \quad (3.83)$$

Protože současně musí být splněno  $v_1 \widehat{D} v_3^T = v_2 \widehat{D} v_3^T = 0$  a  $v_3 \widehat{D} v_3^T \neq 0$ , hodnotu vektoru  $v_3$  spočteme podle předpisu

$$v_1 \widehat{D} v_3^T = v_2 \widehat{D} v_3^T = 0 = v_1 \widehat{D} \underbrace{\left( \omega_3^T - v_1^T \frac{v_1 \widehat{D} \omega_3^T}{v_1 \widehat{D} v_1^T} - v_2^T \frac{v_2 \widehat{D} \omega_3^T}{v_2 \widehat{D} v_2^T} \right)}_{v_3^T} \quad (3.84)$$

V konečném výsledku můžeme postup procedury výpočtu  $v_j$  na základě indukce z předchozích vztahů shrnout do rovnice

$$v_j = \omega_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} v_i \quad j = 1, \dots, m \quad (3.85)$$

Dalším krokem je určení monické dolní trojúhelníkové matice  $L$  ze znalosti  $W$  a  $V$  mezi nimiž je definován vztah

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{m,1} & \cdots & l_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix}}_L V = \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \\ l_{2,1} v_1 + v_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m-1} l_{m,i} v_i + v_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Z předchozího vztahu pro jednotlivé řádky matice  $W$  v závislosti na hledaných elementech matice  $L$  plyne

$$\omega_j = v_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_{j,i} v_i \quad j = 1, \dots, m \quad (3.87)$$

Odtud vyjádřením libovolně voleného  $j$ -tého řádku matice  $W$  z (3.85) a dosazením výsledku vyjádření do předchozího zápisu získáme

$$v_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} v_i = v_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_{j,i} v_i \quad j = 1, \dots, m \quad (3.88)$$

Porovnáním levé a pravé strany rovnice (3.88) lze jednoznačně definovat postup sestavení hledané matice  $L$ , kde postupně v  $j$ -tém řádku počítáme jednotlivé prvky nalevo od diagonály

$$l_{j,i} = \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} \quad i = 1, \dots, j-1 \quad (3.89)$$

snadno se můžeme přesvědčit, že  $l_{j,j} = 1$ , protože

$$v_j \widehat{D} v_j^T = \left( \omega_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} v_i \right) \widehat{D} v_j^T = \omega_j \widehat{D} v_j^T = v_j \widehat{D} \omega_j^T \quad (3.90)$$

Z konstrukce vektorů  $v_j$  víme, že hodnoty vstupů na hlavní diagonále matice  $D$  budou

$$\begin{aligned} d_j &= \omega_j \widehat{D} v_j^T = v_j \widehat{D} \omega_j^T \quad j = 1, \dots, m \\ D &= \text{diag} [d_1, \dots, d_m] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Tímto jsme uzavřeli metodiku sestavení produktů  $LDL^T$  matice vyjádřenou ve formě součinu  $W \widehat{D} W^T$  daných vlastností. V případech, kdy hledáme faktorizaci ve tvaru

$$\begin{aligned} UDU^T &= W \widehat{D} W^T = \\ &= UV \widehat{D} (UV)^T \end{aligned} \quad (3.92)$$

s požadavkem transformovat matici  $W$  tentokráte na součin  $UV$  vyhovující rovnici

$$D = V \widehat{D} V^T \quad (3.93)$$

obměnou postupu popsaného v předchozím odstavci přímo pro monickou horní trojúhelníkovou matici  $U$  a diagonální matici  $D$  postupným řešením obdržíme

$$v_j = \omega_j - \sum_{i=j+1}^m \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} v_i \quad j = m, m-1, \dots, 1 \quad (3.94)$$

kde  $v_j$  je  $j$ -tý řádek matice  $V$  a  $\omega_j$  pak  $j$ -tý řádek matice  $W$ . Dále v  $j$ -tém řádku matice  $U$  spočteme jednotlivé prvky napravo od diagonály

$$u_{j,i} = \frac{\omega_j \widehat{D} v_i^T}{v_i \widehat{D} v_i^T} \quad i = j + 1, \dots, m \quad (3.95)$$

a všechny diagonální prvky této matice položíme rovny jedné, tedy  $u_{j,j} = 1$ . Posledním krokem je určení diagonálních prvků matice  $D$  podle

$$d_j = \omega_j \widehat{D} v_j^T = v_j \widehat{D} \omega_j^T \quad j = m, m-1, \dots, 1 \quad (3.96)$$

### 3.2.4 Minimalizace kvadratické formy s využitím Choleského produktů rozšířené informační matice

Rozšířená kovarianční matice  $\mathcal{C}_k$  vystupující v inverzi v kvadratické formě (3.64) bude nyní faktorizována odlišným způsobem podle následujícího vztahu

$$\mathcal{C}_k = S_{\mathcal{C}_k} S_{\mathcal{C}_k}^T \quad (3.97)$$

kde  $S_{\mathcal{C}_k}$  je reálná horní trojúhelníková matice, obecně je faktor  $S_{\mathcal{C}_k}$  označován jako odmocnina z matice  $\mathcal{C}_k$ . Faktorizace pozitivně definitní symetrické matice  $\mathcal{C}_k$  na součin trojúhelníkových matic, které jsou si až na transpozici rovny, je jediná až na znaménko každého z řádků. Jsou-li výsledkem faktorizace produkty s kladnými znaménky u svých diagonálních vstupů, pak nalezené řešení je jediné a je označováno jako Choleského rozklad. Matice  $S_{\mathcal{C}_k}$  je v této souvislosti nazývána Choleského trojúhelníkem matice  $\mathcal{C}_k$ . Matice  $S_{\mathcal{C}_k}$  zastupuje blokovou matici s vnitřním uspořádáním podle

$$S_{\mathcal{C}_k} = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{C}1(k)} & S_{\mathcal{C}2(k)} \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

kde  $S_{\mathcal{C}1(k)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S_{\mathcal{C}2(k)} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  a  $\sigma_k \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Kvadratickou formu (3.64) s ohledem na zápis (3.97) přepíšeme jako

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} S_{\mathcal{C}_k}^{-T} S_{\mathcal{C}_k}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Inverzi blokové trojúhelníkové matice snadno provedeme v souladu s předpisem

$$S_{\mathcal{C}_k}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{C}1(k)}^{-1} & -\sigma_k^{-1} S_{\mathcal{C}1(k)}^{-1} S_{\mathcal{C}2(k)} \\ 0 & \sigma_k^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Přístupujeme-li k matici  $S_{Ck}$  jako k matici složené po blocích, (3.100) vede postupnými úpravami směřujícími z levé do pravé části matice na triviální výpočet inverze této matice. S využitím (3.100) upravíme kritériální funkci (3.99) na úplný čtverec

$$\begin{aligned} V_k(\theta_k) &= \begin{bmatrix} \theta_k^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{C1(k)}^{-T} & 0 \\ -\sigma_k^{-1} S_{C2(k)}^T S_{C1(k)}^{-T} & \sigma_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{C1(k)}^{-1} & -\sigma_k^{-1} S_{C1(k)}^{-1} S_{C2(k)} \\ 0 & \sigma_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \sigma_k^{-2} + \left( \theta_k^T - \sigma_k^{-1} S_{C2(k)}^T \right) S_{C1(k)}^{-T} S_{C1(k)}^{-1} \left( \theta_k - \sigma_k^{-1} S_{C2(k)} \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Hodnotu vektoru minimalizujícího výše položenou kvadratickou formu nalezneme, protože výraz  $S_{C1(k)}^{-T} S_{C1(k)}^{-1}$  je vždy pozitivně definitní matice, položíme-li

$$\hat{\theta}_k = S_{C2(k)} \sigma_k^{-1} \quad (3.102)$$

Tomu odpovídá nejmenší možná hodnota funkce (3.101) vzhledem k volbě argumentu  $\theta_k$

$$\mathcal{V}_k(\hat{\theta}_k) = \min_{\theta_k} \mathcal{V}_k(\theta_k) = \sigma_k^{-2} \quad (3.103)$$

Naším záměrem je vhodným způsobem propojit produkt (faktor) získaný přímo rozkladem (faktorizací) rozšířené informační matice s hledanou maticí  $S_{\mathcal{M}k}$ , za tímto záměrem definujeme

$$\mathcal{M}_k = S_{\mathcal{M}k} S_{\mathcal{M}k}^T \quad (3.104)$$

kde  $S_{\mathcal{M}k}$  je dolní trojúhelníková (bloková) matice. Matici  $S_{\mathcal{M}k}$  schematicky rozdělíme podle

$$S_{\mathcal{M}k} = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{M}1(k)} & 0 \\ S_{\mathcal{M}2(k)} & \sigma_k^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Po nalezení inverzní matice k matici  $S_{\mathcal{M}k}^T$  můžeme položit rovnost

$$\begin{bmatrix} S_{C1(k)} & \sigma_k \hat{\theta}_k \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{M}1(k)}^{-T} & -\sigma_k S_{\mathcal{M}1(k)}^{-T} S_{\mathcal{M}2(k)}^T \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Pravý sloupec matice  $S_{\mathcal{M}k}^{-T}$  uchovává informaci o hledaném vektoru  $\hat{\theta}_k$  představující nejlepší odhad ve smyslu kvadratického kritéria (3.101). Matice  $S_{\mathcal{M}k}$  na posledním diagonálním vstupu přímo indexuje hodnotu odmocniny o aktuálním stavu této kritériální funkce. Protože výpočet (3.106) zastupuje variantu rozšířené identifikace, lze očekávat, že vhodnou volbou struktury modelu submatice  $S_{C1(k)}$  uchovává informace o všech procesních modelech nižších řádů a  $S_{\mathcal{M}1(k)}$  na hlavní diagonále zaznamenává odmocniny z hodnot kritériálních funkcí.



Abychom mohli implementovat proceduru minimalizující (3.99) s využitím Choleského produktu, předpokládejme, že matice  $\mathcal{M}_k$  může být vyjádřena ve tvaru součinu matic

$$\mathcal{M}_k = WW^T \quad (3.107)$$

kde  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pro  $m \leq n$  není dolní (popř. horní) trojúhelníková matice. Otázkou zůstává, jak transformovat matici  $W$  na Choleského trojúhelník a současně zachovat platnost výrazu (3.107). Tento problém lze současně řešit několika numerickými algoritmy provádějícími ortogonální transformaci, mezi něž se řadí Householderova reflexe (HR) [16], metoda Givensových rotací (GR) [13] a Gramova-Schmidtova (GS) ortogonalizace [40]. V této části se budeme zabývat modifikovanou variantou Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace (MGS). V práci [19] věnující se komparaci numerických vlastností jednotlivých metod ortogonální transformace, konkrétně HR, GR a MGS, je uvedeno, že nejlepších výsledků lze dosáhnout právě s algoritmem MGS. Požadavkem je vhodným způsobem provést triangulizaci submatice  $W_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a současně dosáhnout vynulování submatice  $W_{12} \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Ve výsledku hledáme ortonormální matici  $\bar{T}$  (vlastně postačuje pouze část této matice) a dolní trojúhelníkovou matici  $S$  takové, že platí

$$\begin{aligned} SS^T &= W^{(1)}(W^{(1)})^T = \\ &= \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix}}_{\bar{T}} \begin{bmatrix} \bar{T}_1^T & \bar{T}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^T \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

kde  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\bar{T}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a u  $W^{(j)}$  horní index naznačuje krok výpočtu, neboť do „pomocné“ matice  $W^{(j)}$  s  $j \in [1, m]$  budou ukládány výsledky mezivýpočtů. Pro  $j = 1$  pak  $W^{(1)} = W$ . Protože pro naše potřeby není nutně vyžadována znalost celé matice  $\bar{T}$ , zajímáme se pouze o tvar matice  $S$ , postačuje, sestavíme-li submatici  $\bar{T}_1$ . Naším cílem je tedy současně sestavit matice  $S$  a  $\bar{T}_1$  s využitím znalosti matice  $W^{(1)}$  dané vzájemnou relací

$$W^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{2,1} & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_{m,1} & \cdots & s_{m,m-1} & \sigma_m \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}}_{\bar{T}_1} \quad (3.110)$$

V porovnání s WGS algoritmus MGS hledá transformaci matice  $W$  na součin  $S\bar{T}_1$  tak, aby platilo

$$I = \bar{T}_1 \bar{T}_1^T \quad (3.111)$$

Potom v souladu se stanoveným způsobem pojmenování hledáme soubor vektorů  $\{\tau_j\}_{j=1}^m$  které jsou  $I$ -ortonormální, tj.

$$\bar{T}_1 \bar{T}_1^T = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1^T & \tau_2^T & \cdots & \tau_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Maticový zápis (3.110) přepíšeme pro jednotlivé řádky jako

$$W_j^{(1)} = \sigma_j \tau_j + \sum_{i=1}^{j-1} s_{j,i} \tau_i \quad j = 1, \dots, m \quad (3.113)$$

kde  $W_j^{(1)}$  představuje  $j$ -tý řádek matice  $W^{(1)}$ . Z tohoto bodu můžeme snadno nalézt hodnotu  $\sigma_1$ . S odkazem na požadované vlastnosti matice  $\bar{T}_1$  vstup  $\sigma_1$  spočteme podle

$$W_1^{(1)} = \sigma_1 \tau_1 \quad (3.114)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{W_1^{(1)} (W_1^{(1)})^T} \quad (3.115)$$

Poznamenejme, že diagonální vstup  $\sigma_1$  (stejně tak i všechny zbylé diagonální vstupy) zaznamenává nezápornou číselnou hodnotu. Protože v rovnici (3.114) známe všechny veličiny až na vektor  $\tau_1$ , tento jednoduše vyjádříme a získáme

$$\tau_1 = W_1^{(1)} / \sigma_1 \quad (3.116)$$

Nyní násobením všech složek v rovnici (3.113) vektorem  $\tau_1^T$  zprava obdržíme doposud neznámé prvky vektoru umístěného vlevo pod hlavní diagonálou matice  $S$ , tedy

$$W_j^{(1)} \tau_1^T = \sigma_j \tau_j \tau_1^T + \sum_{i=1}^{j-1} s_{j,i} \tau_i \tau_1^T = s_{j,1} \quad j = 2, \dots, m \quad (3.117)$$

kde jsme opět využili charakteristických vlastností ortonormální matice  $\bar{T}_1$ . V tomto okamžiku je znám první sloupec matice  $S$  a první řádek matice  $\bar{T}_1$ . Převedením známých veličin v rovnici (3.113) na levou stranu této rovnice postavíme problém do nového startovního bodu, tedy

$$W_j^{(2)} = W_j^{(1)} - s_{j,1} \tau_1 = \sigma_j \tau_j + \sum_{i=2}^{j-1} s_{j,i} \tau_i \quad j = 2, \dots, m \quad (3.118)$$

A odtud můžeme schematicky shodným způsobem nalézt prvky vektorů tvořících druhý sloupec matice  $S$  a druhý řádek matice  $\bar{T}_1$ . Touto transformací sekvenčně převádíme blok matice  $W$  (specifičtěji blok  $W_{11}$  ze vztahu (3.108)) na dolní trojúhelníkovou matici přímo po celých sloupcích. Výsledný algoritmus popisující modifikovanou Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci je pro  $j = 1, \dots, m$  popsán následující posloupností úkonů.

Nejdříve spočteme skalární veličinu příslušného diagonálního vstupu matice  $S$

$$\sigma_j = \sqrt{W_j^{(j)} (W_j^{(j)})^T} \quad (3.119)$$

Odtud určíme  $j$ -tý řádek matice  $\bar{T}_1$  podle

$$\tau_j = W_j^{(j)} / \sigma_j \quad (3.120)$$

a vyplníme  $j$ -tý sloupec matice  $S$

$$s_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, j-1 \\ \sigma_j & i = j \\ W_i^{(j)} \tau_j^T & i = j+1, \dots, m \end{cases} \quad (3.121)$$

Následně provedeme přepočtení nového vzoru uchovaného v submatici matice  $W^{(j+1)}$  tak, aby tento korespondoval s maticí vzniklou součinem ve smyslu (3.110) z doposud nenalezených vektorů matic  $S$  a  $\bar{T}_1$

$$W_i^{(j+1)} = W_i^{(j)} - s_{i,j} \tau_j \quad i = j+1, \dots, m \quad (3.122)$$

Všimněme si, že vždy prvních  $j$  řádků matice  $W^{(j+1)}$  není výpočtem modifikováno, neboť tyto už nevymezují hledané vektory matic  $S$  a  $\bar{T}_1$ .

Předchozí postup můžeme upravit i pro transformaci matice  $W$  na součin

$$W^{(1)} = \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix}}_{\bar{T}} = S \bar{T}_1 \quad (3.123)$$

kde  $S$  je matice mající horní trojúhelníkový tvar.

Výsledný zápis algoritmu lze postupně pro  $j = m, m-1, \dots, 1$  uzavřít ve tvaru

$$\sigma_j = \sqrt{W_j^{(m-j+1)} (W_j^{(m-j+1)})^T} \quad (3.124)$$

kde  $\sigma_j$  zastupuje  $j$ -tý nezáporný diagonální vstup matice  $S$ . Dále sestrojíme  $j$ -tý řádek matice  $\bar{T}_1$  podle

$$\tau_j = W_j^{(m-j+1)} / \sigma_j \quad (3.125)$$

a  $j$ -tý sloupec horní trojúhelníkové matice  $S$

$$s_{i,j} = \begin{cases} W_i^{(m-j+1)} \tau_j^T & i = 1, \dots, j-1 \\ \sigma_j & i = j \\ 0 & i = j+1, \dots, m \end{cases} \quad (3.126)$$

V každém kroku výpočtu rovněž provedeme přepočtení hodnoty nového vzoru indexovaného na příslušné pozici matice  $W^{(m-j+2)}$

$$W_i^{(m-j+2)} = W_i^{(m-j+1)} - s_{i,j} \tau_j \quad i = 1, \dots, j-1 \quad (3.127)$$

Modifikace (3.127) probíhá pouze pro tu část matice  $W^{(m-j+2)}$ , která odkazuje na hledané vektory matic  $S$  a  $\bar{T}_1$ .

Ačkoliv výpočtu rozkladu (faktorizace) matice  $\mathcal{M}_k$  může být dosaženo prostřednictvím klasické Choleského faktorizace nebo  $LDL^T$  faktorizace, diskutované přístupy využívající ortogonální transformaci, tj. MGS a WGS jsou doporučovány s ohledem na numerickou stabilitu výpočtu. Ovšem bez ohledu na způsob rozkladu AIM  $\mathcal{M}_k$  vyvstávají problémy, kdy matice  $\mathcal{M}_k$  nemá dostatečnou hodnotu a je singulární. V takových případech může v libovolné fázi výpočtu u algoritmu MGS nastat, že diagonální prvek  $\sigma_j$  bude roven nule a vážený skalární součin  $v_j \widehat{D} v_j^T$  u algoritmu WGS nabude nulové hodnoty.

### 3.3 Rozšířená identifikace a filtrace v rekurzivním režimu učení

V této podkapitole budou odvozeny rekurzivní varianty metod implementujících rozšířenou identifikaci a filtraci za účelem řešení problému nejmenších čtverců. Spolu s koncepcí rozšířené struktury bude stručně uveden přehled faktorizovaných konvenčních rekurzivních metod nejmenších čtverců. Na vzniklá řešení budou kladeny jisté kvalitativní nároky související s požadavky reálné aplikace. Nejdůležitější vlastnosti, které by měla optimalizační metoda estimace splňovat, vymežíme následujícím výčtem:

1. Algoritmus by měl poskytnout řešení problému přesně vzhledem k omezenému informačnímu obsahu dat a minimalizovat vliv nepřesností výpočtu vyvolaných špatnou podmíněností problému.
2. V případě adaptivního sledování parametrů procesu by rušivá složka nevypovídající o dynamických vlastnostech procesu neměla být vyhodnocena jako změna ve vývoji parametrů.

3. Algoritmus by neměl být citlivý na přeparametrizování.
4. Optimalizační procedura by měla představovat co možná nejmenší výpočetní zátěž z důvodu jejího nasazení v reálném čase.
5. Nasazení algoritmu by mělo být umožněno i na počítači s konečnou délkou slova (výpočet by měl kompenzovat nedostatečnou přesnost hardwaru) a
6. nepřesnost výpočtu by neměla způsobit degradaci vlastností jednotlivých kvantit do té míry, že algoritmus ztratí schopnost konvergence.

### 3.3.1 Rozšířená identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

V tomto odstavci na základě výsledků jednorázového výpočtu identifikace nahradíme dávkové sestavení jednotlivých kvantit  $R_k$ ,  $x_k$  a  $Z_k$  reprodukujícími se operacemi. Začneme sestavením matice  $R_k$

$$\begin{aligned} R_k &= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1} + \begin{bmatrix} h_k & H_{k-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k^T \\ H_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda_e R_{k-1} + h_k h_k^T \end{aligned} \quad (3.128)$$

kde jsme definovali aktualizaci informační matice, resp. inverzi kovarianční matice v okamžiku dostupnosti nových dat. Dále stanovíme obnovu kvantity  $x_k$

$$\begin{aligned} x_k &= - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) P_0^{-1} \hat{\theta}_0 - \begin{bmatrix} h_k & H_{k-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda_e x_{k-1} - h_k y_k \end{aligned} \quad (3.129)$$

a kvantity  $Z_k$

$$\begin{aligned} Z_k &= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \hat{\theta}_0^T P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \begin{bmatrix} y_k^T & Y_{k-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda_e Z_{k-1} + y_k^T y_k \end{aligned} \quad (3.130)$$

Odtud sloučením dílčích úprav (3.128), (3.129) a (3.130) do struktury rozšířené informační matice  $\mathcal{M}_k$  obdržíme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_k & x_k \\ x_k^T & Z_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\theta}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e R_{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_e \mathcal{V}_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\theta}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix}^T + \\ &+ \begin{bmatrix} h_k \\ -y_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_k \\ -y_k^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.131)$$

Zápis (3.131) zdůrazňuje myšlenku, že cílem je zapomínat data, nikoliv vektor odhadovaných parametrů. Násobení blokově diagonální matice faktorem  $\lambda_e$  v (3.131) má samozřejmě stejný efekt jako násobení celé matice  $\mathcal{M}_{k-1}$  tímto faktorem. Z povahy ACM víme, že v sobě uchovává všechny informace potřebné k rekurzivní identifikaci. Požadavkem je tak v okamžiku příchodu nových informací rekurzivně aktualizovat pouze matici  $\mathcal{C}_k$ . Ekvivalentně k rovnici (3.131) píšeme

$$\mathcal{C}_k^{-1} = \lambda_e \mathcal{C}_{k-1}^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (3.132)$$

Ve vztahu ke kvadratické formě (3.23) rekurzivní aktualizace představuje výpočet

$$\mathcal{V}_k(\theta_k) = \lambda_e \mathcal{V}_{k-1}(\theta_k) + \left(y_k - h_k^T \theta_k\right)^T \left(y_k - h_k^T \theta_k\right) \quad (3.133)$$

Tímto zajistíme přidání nové lineární rovnice, vlastně z pohledu mnohamodelové identifikace hned  $p$  rovnic ( $\theta_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ), do předchozí soustavy lineárních rovnic. Nyní řešíme problém, jak jednoduše získat optimální odhad  $\hat{\theta}_k$ , aniž bychom museli znovu řešit aktualizovanou soustavu lineárních rovnic prostřednictvím inverze  $\mathcal{C}_k^{-1}$ . Pro získání odhadu je výhodnější šíření matice  $\mathcal{C}_k$  namísto její inverze. Úpravou (3.131) s využitím identity (3.17), obdržíme aktualizaci přímo matice  $\mathcal{C}_k$  ve formě

$$\mathcal{C}_k = \frac{1}{\lambda_e} \left( \mathcal{C}_{k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k-1}}{\lambda_e + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k-1} \varphi_k} \right) \quad (3.134)$$

Výraz (3.134) můžeme dále převést do tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k = & \frac{1}{\lambda_e} \left( I - \alpha_k \mathcal{C}_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T \right) \mathcal{C}_{k-1} \left( I - \alpha_k \mathcal{C}_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T \right)^T + \\ & + \alpha_k^2 \mathcal{C}_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k-1} \end{aligned} \quad (3.135)$$

kde jsme zavedli pomocnou skalární veličinu

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_e + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k-1} \varphi_k} \quad (3.136)$$

Ačkoliv (3.134) a (3.135) jsou matematicky ekvivalentní. Způsob výpočtu podle (3.135) je z numerického hlediska přínosnější, neboť zajišťuje setrvání pozitivní definitnosti a symetričnosti matice  $\mathcal{C}_k$ . Nedostatkem zápisu (3.134) jsou jeho nevyhovující numerické vlastnosti, které se mohou projevit v případě nasazení na reálnou aplikaci. V průběhu výpočtu může rozšířená kovarianční matice konvergovat k matici s velmi malými hodnotami svých prvků, v důsledku čehož může ve výpočtu dojít k odčítání dvou téměř identických matic s velmi malými hodnotami. Jestliže výpočet rozdílu dosáhne hranice výpočetní přesnosti počítače, pak (3.134) může vést na nekorektní numerické výsledky.

Proces obnovy matic  $\mathcal{C}_k$  a  $\mathcal{M}_k$ , pracuje-li algoritmus identifikace rovněž s maticí  $\mathcal{M}_k$ , lze rozepsat ve dvou krocích a to na datový krok

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{k|k} &= \mathcal{C}_{k|k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} = \\ &= \left( I - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \right) \mathcal{C}_{k|k-1} \left( I - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \right)^T + \\ &\quad + \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{\left( 1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \right)^2}\end{aligned}\tag{3.137}$$

$$\mathcal{M}_{k|k} = \mathcal{M}_{k|k-1} + \varphi_k \varphi_k^T \tag{3.138}$$

a časový krok výpočtu

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = \lambda_e \mathcal{M}_{k|k} \tag{3.139}$$

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} \mathcal{C}_{k|k} \tag{3.140}$$

Této separace výpočtu budeme později využívat k formulaci problému omezeného exponenciálního zapomínání řízeného informačním přínosem dat.

### 3.3.2 LD filtrace rekurzivní metody nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Protože rekurzivní metoda nejmenších čtverců (RLS) nevykazuje příliš spolehlivé numerické vlastnosti, není ve své elementární podobě vhodná pro přímé nasazení. Z tohoto důvodu vznikla celá řada modifikací metody RLS zajišťujících numerickou stabilitu a navyšujících přesnost výpočtu. Mezi které varianta propojující rekurzivní obnovu přímo LD faktorů kovarianční matice  $P_k$  spolu s ortogonální transformací (LD-RLS), patří k těm nejspolehlivějším implementacím.

Doplňme-li požadavek na exponenciální zapomínání (EF), metoda vychází ze základního tvaru předpisu aktualizace kovarianční matice daného rovnicí

$$P_k = \frac{1}{\lambda_e} \left( P_{k-1} - \frac{P_{k-1} h_k h_k^T P_{k-1}}{\lambda_e + h_k^T P_{k-1} h_k} \right) \tag{3.141}$$

ale namísto přímého šíření matice  $P_k$ , faktorizuje matici  $P_k$  na  $P_k = L_k D_k L_k^T$  a pracuje pouze s produkty  $L_k$  a  $D_k$ , čímž ve výsledku zajišťuje pozitivní definitnost a symetričnost původní matice  $P_k$ . Pokud vhodným způsobem uspořádáme hledané kvantitativy  $L_k$ ,  $D_k$  a korekční člen do faktorů blokové matice tak, abychom našli tomu odpovídající blokovou matici tvořenou známými kvantitativami, pak faktorizaci

známé matice můžeme přímo vyčíslit vyšetřované kvantify. Takovéto vlastnosti splňuje svým uspořádáním sdružená kovarianční matice výstupu a parametrů [34]. Metodu dále rozvedeme v datovém a časovém kroku výpočtu s technikou EF.

Pro účely sestavení sdružené kovarianční matice upravíme tvar korekčního členu (Kalmanova zesílení) vystupujícího v rovnici (2.4) podle

$$K_k = P_{k|k} h_k = \frac{P_{k|k-1} h_k}{1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k} \quad (3.142)$$

Kalmanovo zesílení uplatníme v zápisu pro datový krok obnovy kovarianční matice (2.3)

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k \left(1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k\right) K_k^T \quad (3.143)$$

Následně sestavíme sdruženou kovarianční matici a tu transformujeme podle schématu

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & h_k^T L_{k|k-1} \\ 0 & L_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_k^T L_{k|k-1} \\ 0 & L_{k|k-1} \end{bmatrix}^T = \\ & = \begin{bmatrix} 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k & \left(1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k\right) K_k^T \\ K_k \left(1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k\right) & K_k \left(1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k\right) K_k^T + L_{k|k} D_{k|k} L_{k|k}^T \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K_k & L_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k & 0 \\ 0 & D_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K_k & L_{k|k} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.144)$$

Z výsledku transformace určíme aktualizovanou hodnotu parametrů

$$\hat{\theta}_{k|k} = \hat{\theta}_{k|k-1} + K_k \left(y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k|k-1}\right) \quad (3.145)$$

Numericky spolehlivá implementace datového kroku výpočtu metody RLS spočívá v sestavení matice vystupující na levé straně rovnice (3.144) ze známých kvantit  $L_{k|k-1}$ ,  $D_{k|k-1}$  a vektoru pozorování  $h_k$ , jejím převedením s využitím procedury WGS na součin monické dolní trojúhelníkové, diagonální a monické horní trojúhelníkové matice a v aktualizaci hledaných parametrů.

Časový krok metody v případě exponenciálního zapomínání je popsán následujícími vztahy

$$D_{k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} D_{k|k} \quad (3.146)$$

$$L_{k+1|k} = L_{k|k} \quad (3.147)$$

$$\hat{\theta}_{k+1|k} = \hat{\theta}_{k|k} \quad (3.148)$$

Popis časového kroku výpočtu metody se odlišuje v závislosti na volbě techniky zapomínání a lze jej vyjma případu s mnohonásobným faktorem exponenciálního



zapomínání přizpůsobit libovolné technice doposud popsané v této práci. Pokud matice faktorů  $\Lambda_k$  nesplňuje  $\Lambda_k = \lambda_e I$  a její diagonální vstupy se hodnotově vzájemně odlišují, bude matice  $P_k$  nesymetrická. Aktualizace produktů nesymetrické matice  $P_k$  pak vyžaduje některou z forem nesymetrické faktorizace.

Z popisovaných vlastností metody LD-RLS lze vyvodit, že metoda představuje alternativní způsob zápisu ke klasické metodě RLS. Význam LD filtru u této metody spočívá v zajištění stability výpočtu. Jedná se o způsob implementace, který umožňuje předcházet divergenci v důsledku výpočetních chyb. Vhodnou reformulací problému lze však zjistit, že přínos faktorizace představuje mnohem víc, než pouhé vylepšení numerických vlastností.

### 3.3.3 Rozšířená UD identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Komparací vztahů (3.134) a (3.141) můžeme pozorovat, že oba výpočty vykazují shodnou strukturu. V obou případech datovou aktualizaci zajišťuje odečet matice s jednotkovou hodnotou obsahující minulou hodnotu (rozšířenou) kovarianční matice a aktuální hodnotu (rozšířeného) pozorování. Nyní bude uveden postup začlenění UD filtru využívajícího principu ortogonální transformace do výpočtu ACM podle (3.134). Na uvedené optimalizační schéma bude dále odkazováno jako na EF-AUDI-RLS. Připomeňme, že v kapitole 2 jsme zápisem AUDI-RLS rozuměli filtraci rekurzivní obnovy ACM  $\mathcal{C}_k$  pomocí Biermanovy  $UDU^T$  techniky. Od tohoto bodu bude zápis UD v názvu algoritmu výhradně symbolizovat techniku faktorizace využívající ortogonální transformaci, v opačném případě na to bude čtenář upozorněn.

Požadavkem je v každém kroku výpočtu rekurzivně obnovovat produkty symetrické matice  $\mathcal{C}_k$ . Datový krok obnovy popisuje rovnice

$$U_{\mathcal{C},k|k} D_{\mathcal{C},k|k} U_{\mathcal{C},k|k}^T = \mathcal{C}_{k|k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \quad (3.149)$$

kde rozšířená kovarianční matice je nyní dána  $\mathcal{C}_{k|k-1} = U_{\mathcal{C},k|k-1} D_{\mathcal{C},k|k-1} U_{\mathcal{C},k|k-1}^T$ . Definujeme pomocný vektor  $\mathcal{Z}_k$

$$\mathcal{Z}_k = \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \quad (3.150)$$

potom tvar (3.149) můžeme upravit na maticové vyjádření

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{C},k|k} D_{\mathcal{C},k|k} U_{\mathcal{C},k|k}^T &= \mathcal{C}_{k|k-1} - \mathcal{Z}_k \left( 1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \right) \mathcal{Z}_k^T = \\ &= \begin{bmatrix} U_{\mathcal{C},k|k-1} & \mathcal{Z}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\mathcal{C},k|k-1} & 0 \\ 0 & -1 - \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\mathcal{C},k|k-1} & \mathcal{Z}_k \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.151)$$

které snadno převedeme ortogonální transformací WGS zpět na požadovanou formu, tj. produkt zastoupený horní trojúhelníkovou a diagonální maticí. V důsledku exponenciálního zapomínání dochází v časovém kroku výpočtu k násobení diagonální matice s faktorem  $1/\lambda_e$

$$U_{C,k+1|k} = U_{C,k|k} \quad (3.152)$$

$$D_{C,k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} D_{C,k|k} \quad (3.153)$$

a časový vývoj trojúhelníkové matice (vlastně matice parametrů) pak zůstává beze změny. Ačkoliv algoritmy EF-AUDI-RLS a EF-LD-RLS mají vzájemně podobnou strukturu, jejich interpretace je poněkud rozdílná. Zatímco LD filtr u RLS představuje pouze způsob bezpečné implementace metody, u přístupu AUDI-RLS jednotlivé faktory navíc explicitně charakterizují procesní modely a hodnoty kritériálních funkcí. Tedy faktory  $U_{C,k}$  a  $D_{C,k}$  nejsou jenom dočasné proměnné bez fyzikálního významu, ale jsou přímo hledaným výstupem optimalizační procedury.

Jak už bylo dříve zmíněno, numerické problémy jsou spojeny zejména s realizací aktualizace kovarianční matice. Alternativně proto můžeme šířit přímo informační matici. Konkrétně pro rozšířenou identifikaci, vyjma modelu s vyšším počtem výstupních veličin než je počet jeho parametrů, s obnovou AIM obvykle vzrůstají nároky kladené na výpočet. Parametry modelů nemohou být přímočaře vyjádřeny a jsou získány dodatečným řešením inverze trojúhelníkové matice.

S odvoláním na (3.138) sestavíme datový krok obnovy AIM podle

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{M},k|k} D_{\mathcal{M},k|k} L_{\mathcal{M},k|k}^T &= \mathcal{M}_{k|k-1} + \varphi_k \varphi_k^T = \\ &= \begin{bmatrix} L_{\mathcal{M},k|k-1} & \varphi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\mathcal{M},k|k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\mathcal{M},k|k-1} & \varphi_k \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.154)$$

kde AIM je charakterizována svými produkty  $\mathcal{M}_{k|k-1} = L_{\mathcal{M},k|k-1} D_{\mathcal{M},k|k-1} L_{\mathcal{M},k|k-1}^T$ . Shodně s předchozím případem převedeme ortogonální transformací maticovou formu na pravé straně rovnice (3.154) na požadovaný tvar strany levé. Časový krok výpočtu potom bude

$$L_{\mathcal{M},k+1|k} = L_{\mathcal{M},k|k} \quad (3.155)$$

$$D_{\mathcal{M},k+1|k} = \lambda_e D_{\mathcal{M},k|k} \quad (3.156)$$

### 3.3.4 Odmocninová filtrace rekurzivní metody nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

V předchozích odstavcích jsme odvodili proces aktualizace datového kroku výpočtu metody RLS postaveného na technice šíření LD faktorů sdružené kovarianční matice. Nyní odvodíme alternativní způsob sestavení sdružené kovarianční matice, vedoucí s využitím ortogonální transformace na odmocninovou filtraci matice  $P_k$  ve významu  $P_k = S_k S_k^T$ , kde  $S_k$  je dolní trojúhelníková matice. Abychom mohli vyjádřit obnovu  $P_k$  ve tvaru součinu dvou matic, provedeme úpravu datového kroku výpočtu (3.143) podle

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k|k-1} - K_k \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right) K_k^T = \\ &= P_{k|k-1} - \bar{K}_k \bar{K}_k^T \end{aligned} \quad (3.157)$$

kde jsme zavedli pomocný vektor  $\bar{K}_k$

$$\bar{K}_k = K_k \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} \quad (3.158)$$

Odtud s využitím (3.144) sestavíme sdruženou kovarianční matici jako součin blokových matic s cílem nalézt Choleského trojúhelník sdružené kovarianční matice

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & h_k^T S_{k|k-1} \\ 0 & S_{k|k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_k^T S_{k|k-1} \\ 0 & S_{k|k-1} \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k & \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} \bar{K}_k^T \\ \bar{K}_k \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} & S_{k|k} S_{k|k}^T + \bar{K}_k \bar{K}_k^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} & 0 \\ \bar{K}_k & S_{k|k} \end{bmatrix} \bar{T}_k \bar{T}_k^T \begin{bmatrix} \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} & 0 \\ \bar{K}_k & S_{k|k} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.159)$$

Takže pro nalezení vyšetřovaných kvantit postačuje, jestliže vhodnou ortogonální transformací postupně převedeme blokovou matici vystupující v součinu v levé části rovnice (3.159) vlevo na požadovaný tvar dolní trojúhelníkové matice, tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & h_k^T S_{k|k-1} \\ 0 & S_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( 1 + h_k^T P_{k|k-1} h_k \right)^{1/2} & 0 \\ \bar{K}_k & S_{k|k} \end{bmatrix} \bar{T}_k \quad (3.160)$$

V prvním sloupci po úpravě dostaneme Kalmanovo zesílení a ve zbylých sloupcích pak přímo aktualizovanou hodnotu faktoru  $S_{k|k}$ . Z výsledku transformace snadno určíme střední hodnotu parametrů podle

$$\hat{\theta}_{k|k} = \hat{\theta}_{k|k-1} + K_k \left( y_k - h_k^T \hat{\theta}_{k|k-1} \right) \quad (3.161)$$

Časový krok zahrnující navýšení nejistoty odhadovaných parametrů prostřednictvím exponenciálního zapomínání definují vztahy

$$S_{k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} S_{k|k} \quad (3.162)$$

$$\hat{\theta}_{k+1|k} = \hat{\theta}_{k|k} \quad (3.163)$$

Datový a časový krok společně uzavírají rekurzivní metodu nejmenších čtverců s odmocninovou filtrací doplněnou o techniku exponenciálního zapomínání (EF-SR-RLS). Úpravou časového kroku lze opět docílit libovolné formy zapomínání, ta však nesmí narušovat symetričnost matice  $P_k$ .

### 3.3.5 Rozšířená odmocninová identifikace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Obecně lze odmocninové filtry pokládat za numericky více stabilní než je konvenční obnova pouze kovarianční matice. Ve spojitosti s odmocninovým filtrem platí pro vlastní čísla faktorů kovarianční matice, že jsou odmocninou vlastních čísel původní matice. S odkazem na vztah (3.97) lze pro kondiční čísla  $\kappa(\cdot)$  matic  $\mathcal{C}_k$  a  $S_{\mathcal{C}_k}$  dokázat, že platí [37]

$$\kappa(\mathcal{C}_k) = \kappa^2(S_{\mathcal{C}_k}) \quad (3.164)$$

Kondiční číslo  $\kappa(\cdot)$  je definováno jako poměr mezi největším  $\sigma_{max}(\cdot)$  a nejmenším  $\sigma_{min}(\cdot)$  singulárním číslem matice [37], tedy

$$\kappa(\mathcal{C}_k) = \frac{\sigma_{max}(\mathcal{C}_k)}{\sigma_{min}(\mathcal{C}_k)} \quad (3.165)$$

Singulární čísla  $\sigma(\cdot)$  jsou ve vztahu k vlastním číslům  $\lambda(\cdot)$  symetrické matice  $\mathcal{C}_k$  podle [37]

$$\begin{aligned} \sigma^2(\mathcal{C}_k) &= \lambda(\mathcal{C}_k \mathcal{C}_k^T) = \\ &= \lambda(\mathcal{C}_k^T \mathcal{C}_k) \end{aligned} \quad (3.166)$$

Protože matice  $\mathcal{C}_k$  je invertovatelná (není singulární) právě tehdy a jenom tehdy, když determinant této matice je nenulový, musí pro existenci inverze matice  $\mathcal{C}_k$  platit

$$1 \leq \kappa(\mathcal{C}_k) < \infty \quad (3.167)$$

Výše položený zápis ozřejmíme, uvedeme-li, že determinant matice odpovídá součinu vlastních čísel této matice.

V případech, kdy  $\kappa(\mathcal{C}_k) \rightarrow \infty$  říkáme, že problém je numericky špatně podmíněný a reprezentace matice  $\mathcal{C}_k$  v digitálním počítači může být vyhodnocena jako singulární, ačkoliv tato matematicky singulární být nemusí. Smyslem odmocninové filtrace je strojově uchovávat matematickou informaci vyjadřovanou ACM  $\mathcal{C}_k$  pouze s využitím její odmocniny  $S_{\mathcal{C}_k}$ , čímž ve výsledku dosáhneme dvojnásobného navýšení přesnosti uchované informace, jak dokazuje vztah (3.164).

Současně, kovarianční matice vzniklá součinem odmocninových produktů bude mít vždy charakter pozitivně definitní (a tím i invertovatelné) matice, tedy bude splňovat nutnou podmínku zajišťující, že metoda dosáhne minima funkce.

Všimněme si, že předchozí varianta konvenční metody nejmenších čtverců zajišťuje dvojnásobnou přesnost uchování informace o matici  $P_k$ . Dodejme, že faktor sdružené kovarianční matice vyjma faktorů matice  $P_k$  rovněž zprostředkovává hodnotu Kalmanova zesílení, a to tak nemusí být dodatečně počítáno s pomocí matice  $P_k$ . Protože samotné odmocninové faktory matice  $P_k$  jsou pouze meziproduktem estimate bez fyzikálního významu, pro sestavení hledaných parametrů je nutné provést dodatečné výpočetní operace nad rámcem sestavení faktoru sdružené kovarianční matice. Oproti tomu u schématu rozšířené identifikace jsou faktory účelně sestavovány se záměrem extrakce procesních parametrů. Lze tak očekávat, že navýšení přesnosti uchované informace o ACM  $\mathcal{C}_k$  bezprostředně ovlivní přímo odhadované parametry modelů.

Podobný problém je rekurentní aktualizace pouze odmocniny ACM  $\mathcal{C}_k$ . Modifikace datového kroku (3.137) je tedy dána

$$S_{\mathcal{C},k|k} S_{\mathcal{C},k|k}^T = \mathcal{C}_{k|k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \quad (3.168)$$

kde rozšířenou kovarianční matici uvažujeme ve formě součinu svých odmocninových faktorů  $\mathcal{C}_{k|k-1} = S_{\mathcal{C},k|k-1} S_{\mathcal{C},k|k-1}^T$ . Naším záměrem je vyšetřit dopad nových dat na vývoj faktoru  $S_{\mathcal{C},k|k}$ . Protože ortogonální transformace pro sestavení matice  $S_{\mathcal{C},k|k}$  nemůže být aplikována přímo na tvar rovnice (3.168), požadujeme vyjádření její pravé strany ve tvaru symetrického součinu. Za tímto účelem zavedeme identitu platnou pro aditivní kvantitu  $cbb^T$  o jednotkové hodnoti

$$SS^T + cbb^T = S \left( I + \frac{c}{1 + \sqrt{\beta}} f f^T \right) \left( I + \frac{c}{1 + \sqrt{\beta}} f f^T \right)^T S^T \quad (3.169)$$

kde  $\beta$  a  $f$  jsou definovány jako

$$\beta = 1 + f^T f c \quad (3.170)$$

$$f = S^{-1} b \quad (3.171)$$

Identita (3.169) může být chápána jako zobecněný případ Potterova rozkladu [35] a její platnost lze snadno ověřit přímým výpočtem. Substitucí za  $S = S_{\mathcal{C},k|k-1}$ ,  $b = \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k$ ,  $c = -1 / (1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k)$  a dosazením výsledku rozkladu do (3.168) vede po konečné úpravě na rovnici

$$S_{\mathcal{C},k|k} = S_{\mathcal{C},k|k-1} \left( I - \frac{S_{\mathcal{C},k|k-1}^T \varphi_k \varphi_k^T S_{\mathcal{C},k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k + \sqrt{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k}} \right) \quad (3.172)$$

Protože obnova faktoru  $S_{\mathcal{C},k|k}$  podle (3.172) nezaručuje horní trojúhelníkový tvar, řešíme triangulizaci členu v závorce ve výše položené rovnici vhodnou ortogonální transformací tak, abychom zachovali platnost rovnice (3.168)

$$\bar{S}_{\mathcal{C},k|k-1} \bar{T}_k = I - \frac{S_{\mathcal{C},k|k-1}^T \varphi_k \varphi_k^T S_{\mathcal{C},k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k + \sqrt{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k}} \quad (3.173)$$

Odtud pak přímo obdržíme vyšetřovaný tvar rekurentní obnovy faktoru  $S_{\mathcal{C},k|k}$

$$S_{\mathcal{C},k|k} = S_{\mathcal{C},k|k-1} \bar{S}_{\mathcal{C},k|k-1} \quad (3.174)$$

Časový krok je definován požadavkem exponenciálního zapomínání

$$S_{\mathcal{C},k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} S_{\mathcal{C},k|k} \quad (3.175)$$

Současně můžeme šířit odmocninové produkty rozšířené informační matice

$$\mathcal{M}_{k|k-1} = S_{\mathcal{M},k|k-1} S_{\mathcal{M},k|k-1}^T \quad (3.176)$$

Rekurzivní aktualizace matice  $S_{\mathcal{M},k|k}$  daty je umožněna úpravou rovnice

$$\begin{bmatrix} S_{\mathcal{M},k|k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_{1(k)} \\ \bar{T}_{2(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\mathcal{M},k|k-1} & \varphi_k \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

Rekurentní aktualizaci odmocninového produktu AIM v datovém kroku tedy realizujeme transformací výrazu na pravé straně této rovnice na dolní trojúhelníkovou matici. Matice nul a ortonormální matice  $\bar{T}_{2(k)}$  nejsou algoritmem využívány.

Časový krok je v souladu s (3.139) vymezen vztahem

$$S_{\mathcal{M},k+1|k} = \sqrt{\lambda_e} S_{\mathcal{M},k|k} \quad (3.178)$$

Algoritmus rozšířené odmocninové identifikace (prostřednictvím triangulizace) rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním (EF-ASRI-RLS) umožňuje kompaktní zpracování vektorového pozorování s aktualizací kvantitou pro AIM  $\mathcal{M}_k$  typu vážená dyáda. V případě modelu s více výstupy je nutné implementovat aktualizaci sekvenčně, tj. jednotlivé vzory přidružené k výstupům separovat na individuální pozorování.

### 3.3.6 Rozšířená filtrace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

V tomto odstavci navážeme na výsledky odvození metody EF-AF-LS filtrující vnitřní stavu obecného vstupně výstupního lineárního modelu s požadavkem sestavení její funkční rekurze. Nalezení propojení mezi maticí  $\mathcal{M}_k$  a její hodnotou platnou v minulém kroku výpočtu  $\mathcal{M}_{k-1}$ , převedeme na problém nalezení rekurzivního zápisu submatic této matice, jmenovitě  $R_k$ ,  $x_k$  a  $Z_k$  popsanych vztahy (3.56), (3.57) a (3.58). Informační matici  $R_k$  nahradíme reprodukcí se operací ve tvaru

$$\begin{aligned} R_k &= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) F_{k-1}^{-T} O_{k-1}^{-1} F_{k-1}^{-1} + \begin{bmatrix} C_k^T & (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k \\ \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \lambda_e F_{k-1}^{-T} R_{k-1} F_{k-1}^{-1} + C_k^T C_k \end{aligned} \quad (3.179)$$

Protože v kvantitě  $x_k$  figuruje  $\hat{o}_k$ , hledáme funkční závislost  $\hat{o}_k$  na  $\hat{o}_{k-1}$

$$\begin{aligned} \hat{o}_k &= F_{k-1} \left( \prod_{j=1}^{k-1} F_{k-j-1} \right) \hat{\theta}_0 + F_{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \left( \prod_{j=1}^{k-l-1} F_{k-j-1} \right) (B_{l-1} u_{l-1} + G_{l-1} y_{l-1}) + \\ &\quad + B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1} = \\ &= F_{k-1} \hat{o}_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1} \end{aligned} \quad (3.180)$$

Z definice  $x_k$  obdržíme

$$\begin{aligned} x_k &= - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \hat{o}_k - \begin{bmatrix} C_k^T & (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \left( \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ U_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \\ &= - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \hat{o}_k - C_k^T y_k - \\ &\quad - \lambda_e (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1})^T Q_{k-1} (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1}) \end{aligned} \quad (3.181)$$

kde pomocné matice  $\mathcal{G}_k$  a  $\mathcal{H}_k$  jsou jednoznačně určeny vzájemným porovnáním rovnic (3.181) a (3.57). Za účelem nalezení rekurzivní relace pro  $x_k$  vyhodnotíme vliv nového měření na transformaci této kvantity, tedy

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= - \left( \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_e \right) F_k^{-T} O_k^{-1} F_k^{-1} \hat{o}_{k+1} - \\
&\quad - \left[ C_{k+1}^T \quad (C_k F_k^{-1})^T \quad (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} F_k^{-1})^T \right] \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_e^2 Q_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot \left( \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_k F_k^{-1} B_k & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} F_k^{-1} B_k & \mathcal{G}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \\ U_{k-1} \end{bmatrix} + \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_k F_k^{-1} G_k & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} F_k^{-1} G_k & \mathcal{H}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \\
&= \lambda_e F_k^{-T} \left[ - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} \hat{o}_k - C_k^T y_k - \right. \\
&\quad \left. - \lambda_e (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1})^T Q_{k-1} (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1}) \right] - \\
&\quad - \lambda_e F_k^{-T} \left[ \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) F_{k-1}^{-T} O_{k-1}^{-1} F_{k-1}^{-1} + \lambda_e (\mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1})^T Q_{k-1} \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} + C_k^T C_k \right] \cdot \\
&\quad \cdot F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) - C_{k+1}^T y_{k+1} = \\
&= \lambda_e F_k^{-T} x_k - \lambda_e F_k^{-T} R_k F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) - C_{k+1}^T y_{k+1} \tag{3.182}
\end{aligned}$$

odtud hledaná relace

$$x_k = \lambda_e F_{k-1}^{-T} x_{k-1} - \lambda_e F_{k-1}^{-T} R_{k-1} F_{k-1}^{-1} (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1}) - C_k^T y_k \tag{3.183}$$



Poslední hledanou veličinu rozvedeme do tvaru zápisu

$$\begin{aligned}
Z_k &= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \hat{o}_k^T O_k^{-1} \hat{o}_k + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \\
&+ \left( \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ U_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} \right)^T \\
&\cdot \begin{bmatrix} \lambda_e^0 & 0 \\ 0 & \lambda_e Q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \\
&= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \hat{o}_k^T O_k^{-1} \hat{o}_k + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + y_k^T y_k + \\
&+ \lambda_e (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1})^T Q_{k-1} (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1})
\end{aligned} \tag{3.184}$$

Opět vyšetřujeme rozvoj veličiny  $Z_k$  v okamžiku příchodu nových dat tak, abychom zachytili její závislost na pomocných maticích  $\mathcal{G}_k$  a  $\mathcal{H}_k$

$$\begin{aligned}
Z_{k+1} &= \left( \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_e \right) \hat{o}_{k+1}^T F_k^{-T} O_k^{-1} F_k^{-1} \hat{o}_{k+1} + \left( \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \\
&+ \left( \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_k F_k^{-1} B_k & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} F_k^{-1} B_k & \mathcal{G}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \\ U_{k-1} \end{bmatrix} + \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_k F_k^{-1} G_k & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} F_k^{-1} G_k & \mathcal{H}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_k \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} \right)^T Q_{k+1} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \\
&= \lambda_e \left[ \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \hat{o}_k^T O_k^{-1} \hat{o}_k + y_k^T y_k + \right. \\
&+ \left. \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \lambda_e (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1})^T Q_{k-1} (\dots) \right] + \\
&+ \lambda_e (B_k u_k + G_k y_k)^T F_k^{-T} R_k F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) + \\
&+ \lambda_e \left[ \hat{o}_k^T \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) O_k^{-1} + y_k^T C_k + \right. \\
&+ \left. \lambda_e (Y_{k-1} + \mathcal{G}_{k-1} U_{k-1} + \mathcal{H}_{k-1} Y_{k-1})^T Q_{k-1} \mathcal{R}_{k-1} F_{k-1}^{-1} \right] \cdot \\
&\cdot F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) - \lambda_e (B_k u_k + G_k y_k)^T F_k^{-T} x_k + y_{k+1}^T y_{k+1} = \\
&= \lambda_e Z_k + \lambda_e (B_k u_k + G_k y_k)^T F_k^{-T} R_k F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) - \\
&- \lambda_e x_k^T F_k^{-1} (B_k u_k + G_k y_k) - \lambda_e (B_k u_k + G_k y_k)^T F_k^{-T} x_k + y_{k+1}^T y_{k+1}
\end{aligned} \tag{3.185}$$

Vývoj  $Z_k$  vyžaduje dostupnost matic  $R_{k-1}$  a  $x_{k-1}$  a je charakterizován předpisem

$$\begin{aligned} Z_k = & \lambda_e Z_{k-1} + \lambda_e (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1})^T F_{k-1}^{-T} R_{k-1} F_{k-1}^{-1} (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1}) - \\ & - \lambda_e x_{k-1}^T F_{k-1}^{-1} (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1}) - \\ & - \lambda_e (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1})^T F_{k-1}^{-T} x_{k-1} + y_k^T y_k \end{aligned} \quad (3.186)$$

Zakomponování dílčích výsledků odvození pro obnovu  $R_k$ ,  $x_k$  a  $Z_k$  do kompaktní maticové formy vede na hledaný mechanismus rekurzivní obnovy přímo AIM  $\mathcal{M}_k$

$$\mathcal{M}_k = \lambda_e F_{k-1}^{-T} \mathcal{M}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (3.187)$$

kde bloková matice  $\mathcal{F}_{k-1}^{-1}$  splňuje

$$\mathcal{F}_{k-1}^{-1} = \begin{bmatrix} F_{k-1}^{-1} & -F_{k-1}^{-1} (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

a rozšířený vektor pozorování

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} C_k^T \\ -y_k^T \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Pro snadnější interpretaci parametrů (vlastně stavů)  $\hat{\theta}_k$  aplikujeme identitu (3.17) na (3.187), čímž získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k = & \left[ \left( \frac{1}{\lambda_e} \mathcal{F}_{k-1} \mathcal{C}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T \right)^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \right]^{-1} = \\ = & \frac{1}{\lambda_e} \left( \mathcal{F}_{k-1} \mathcal{C}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T - \frac{\mathcal{F}_{k-1} \mathcal{C}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{F}_{k-1} \mathcal{C}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T}{\lambda_e + \varphi_k^T \mathcal{F}_{k-1} \mathcal{C}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}^T \varphi_k} \right) \end{aligned} \quad (3.190)$$

Inverzní matici k matici  $\mathcal{F}_{k-1}^{-1}$  sestavíme ve shodě s

$$\mathcal{F}_{k-1} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & (B_{k-1} u_{k-1} + G_{k-1} y_{k-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

Uvážíme-li, že rovnice (3.187) a (3.190) zachycují jednokrokovou filtraci stavu kombinující datový a časový krok výpočtu, lze rekurze ekvivalentně zapsat v datovém

$$\mathcal{C}_{k|k} = \mathcal{C}_{k|k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \quad (3.192)$$

$$\mathcal{M}_{k|k} = \mathcal{M}_{k|k-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (3.193)$$

a v časovém kroku výpočtu

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} \mathcal{F}_k \mathcal{C}_{k|k} \mathcal{F}_k^T \quad (3.194)$$

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = \lambda_e \mathcal{F}_k^{-T} \mathcal{M}_{k|k} \mathcal{F}_k^{-1} \quad (3.195)$$

Doposud jsme uvažovali přímou obnovu matic  $\mathcal{C}_k$  a  $\mathcal{M}_k$ . Naším záměrem bude nyní popsat aktualizaci faktorů těchto matic. Protože vyjádření datového kroku metody je až na vlastní uspořádání matic  $\mathcal{C}_{k|k-1}$ ,  $\mathcal{M}_{k|k-1}$  a vektoru  $\varphi_k$  shodné se zápisy (3.137) a (3.138) postačuje, uvedeme-li přehled modifikací pouze časového kroku výpočtu. Pro sestavení odpovídajícího datového kroku lze využít již odvozených vztahů upravujících variantu rozšířené identifikace. Nejdříve formulujme požadavek na UD filtraci časového kroku ACM  $\mathcal{C}_k$

$$U_{\mathcal{C},k+1|k} D_{\mathcal{C},k+1|k} U_{\mathcal{C},k+1|k}^T = [\mathcal{F}_k U_{\mathcal{C},k|k}] \left[ \frac{1}{\lambda_e} D_{\mathcal{C},k|k} \right] [\mathcal{F}_k U_{\mathcal{C},k|k}]^T \quad (3.196)$$

a pro případ šíření inverze této matice obdržíme

$$L_{\mathcal{M},k+1|k} D_{\mathcal{M},k+1|k} L_{\mathcal{M},k+1|k}^T = [\mathcal{F}_k^{-T} L_{\mathcal{M},k|k}] [\lambda_e D_{\mathcal{M},k|k}] [\mathcal{F}_k^{-T} L_{\mathcal{M},k|k}]^T \quad (3.197)$$

V obou případech u (3.196) a (3.197) časový krok vyžaduje obnovit vhodnou ortogonální transformací horní a dolní trojúhelníkový tvar faktorů  $U_{\mathcal{C},k+1|k}$  a  $L_{\mathcal{M},k+1|k}$ . Podobně realizujeme časový krok faktorizující ACM  $\mathcal{C}_k$  na součin Choleského trojúhelníků

$$S_{\mathcal{C},k+1|k} \bar{T}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_e}} \mathcal{F}_k S_{\mathcal{C},k|k} \quad (3.198)$$

a schéma vývoje inverze ACM  $\mathcal{C}_k$

$$S_{\mathcal{M},k+1|k} \bar{T}_k = \sqrt{\lambda_e} \mathcal{F}_k^{-T} S_{\mathcal{M},k|k} \quad (3.199)$$

kde  $\bar{T}_k$  je v kontextu obou rovnic (3.198) a (3.199) vhodně volená ortonormální matice transformující maticové vyjádření pravé strany na příslušný trojúhelníkový tvar.

### 3.4 Rozšířená identifikace jako forma mnohamodelové estimace a její numerické aspekty

Nyní položíme matematický důkaz potvrzující vlastnosti rozšířené identifikace jako nástroje pro mnohamodelovou paralelní estimaci. Vnitřní struktura rozšířené identifikace bude podrobně vyšetřována vzhledem ke kvadratické formě (3.18). Poskytneme určitý vhled do struktury metody a nalezneme vzájemné propojení jejího fungování s principem metody nejmenších čtverců. Alternativní důkaz vysvětlující činnost metody může být nalezen např. v [28]. V této sekci bude zkoumán především vliv omezujících podmínek nutných pro sestavení rekurentního výpočtu metody,

vliv pořadí prvků ve vektoru  $\varphi_k$  a techniky exponenciálního zapomínání na povahu a uspořádání procesních modelů uvnitř ACM  $\mathcal{C}_k$ .

Pro přehlednou orientaci v rovnicích zavedeme značení  $\varphi_k^{(i)}$ , kde horní index u rozšířeného vektoru pozorování  $\varphi_k$  odpovídá řádu modelu. Symbol horního indexu budeme v tomto kontextu využívat i ve spojení s ostatními kvantitami v metodě vystupujícími. V souladu s optimálním prediktorem modelu ARX  $n$ -tého řádu definujeme rozšířený vektor pozorování poskládaný z párů vstupně výstupních dat

$$\varphi_k^{(n)} = [-y_{k-n}, u_{k-n}, \dots, -y_{k-2}, u_{k-2}, -y_{k-1}, u_{k-1}, -y_k]^T \quad (3.200)$$

V tomto tvaru můžeme vektor  $\varphi_k^{(n)}$  interpretovat jako

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} h_k^{(n)} \\ -y_k^T \end{bmatrix} & h_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} \varphi_k^{(n-1)} \\ u_{k-1}^T \end{bmatrix} \\ \varphi_k^{(n-1)} &= \begin{bmatrix} h_k^{(n-1)} \\ -y_{k-1}^T \end{bmatrix} & h_k^{(n-1)} &= \begin{bmatrix} \varphi_k^{(n-2)} \\ u_{k-2}^T \end{bmatrix} \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi_k^{(0)} &= [-y_{k-n}^T] & h_k^{(1)} &= \begin{bmatrix} -y_{k-n}^T \\ u_{k-n}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.201)$$

Rozšířená matice pozorování pro model  $n$ -tého řádu potom bude zastoupena

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} H_k^{(n)} & -Y_k^{(n)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_k^{(n)T} \\ h_{k-1}^{(n)T} \\ \vdots \\ h_1^{(n)T} \end{bmatrix} - Y_k^{(n)} = \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_k^{(n)T} \\ \varphi_{k-1}^{(n)T} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n)T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.202)$$

kde zápisem  $Y_k^{(i)}$  rozumíme uspořádání

$$Y_k^{(i)} = [y_{k-n+i}, y_{k-n-1+i}, \dots, y_{1-n+i}]^T \quad (3.203)$$

Rozšířená informační matice (AIM) a její submatice jsou pro model  $n$ -tého řádu ve

shodě s omezeným kritériem (3.18) ve tvaru

$$\mathcal{M}_k^{(n)} = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ -\hat{\theta}_0^{(n)T} & I_1 \end{bmatrix} \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \begin{bmatrix} (P_0^{(n)})^{-1} & 0 \\ 0 & \varrho^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ -\hat{\theta}_0^{(n)T} & I_1 \end{bmatrix}^T + \Phi_k^{(n)T} Q_k \Phi_k^{(n)} \quad (3.204)$$

$$R_k^{(n)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) (P_0^{(n)})^{-1} + H_k^{(n)T} Q_k H_k^{(n)} \quad (3.205)$$

$$x_k^{(n)} = - \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) (P_0^{(n)})^{-1} \hat{\theta}_0^{(n)} - H_k^{(n)T} Q_k Y_k^{(n)} \quad (3.206)$$

$$Z_k^{(n)} = \hat{\theta}_0^{(n)T} \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) (P_0^{(n)})^{-1} \hat{\theta}_0^{(n)} + \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + Y_k^{(n)T} Q_k Y_k^{(n)} \quad (3.207)$$

Aby AIM  $\mathcal{M}_k^{(n)}$  mohla exaktně odkazovat na modely nižších řádů, ze vztahu (3.204) vyplývá, že přirozeně vnucuje požadavek na omezení pro všechny modely nižších řádů podle

$$\hat{\theta}_0^{(i)} = [0, \dots, 0]^T \quad i < n \quad (3.208)$$

Potom AIM  $\mathcal{M}_k$  pro nižší řády modelů splňuje

$$\mathcal{M}_k^{(n-1)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \begin{bmatrix} (P_0^{(n-1)})^{-1} & 0 \\ 0 & \varrho^{-2} \end{bmatrix} + \Phi_k^{(n-1)T} Q_k \Phi_k^{(n-1)} \quad (3.209)$$

$$R_k^{(n-1)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) (P_0^{(n-1)})^{-1} + H_k^{(n-1)T} Q_k H_k^{(n-1)} \quad (3.210)$$

$$x_k^{(n-1)} = -H_k^{(n-1)T} Q_k Y_k^{(n-1)} \quad (3.211)$$

$$Z_k^{(n-1)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + Y_k^{(n-1)T} Q_k Y_k^{(n-1)} \quad (3.212)$$

$\vdots$

$$\mathcal{M}_k^{(0)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \varrho^{-2} + \Phi_k^{(0)T} Q_k \Phi_k^{(0)} \quad (3.213)$$

$$\mathcal{M}_k^{(0)} = Z_k^{(0)} = \mathcal{V}_{fk}^{(0)} \left( \hat{\theta}_k^{(0)} \right) \quad (3.214)$$

Ukažme, že  $\mathcal{M}_k$  vyjma odhadu dopředného modelu  $\hat{\theta}_k$  rovněž uchovává odhad zpět-

ného modelu  $\hat{\alpha}_k$ . Konkrétně pro matici  $\mathcal{M}_k^{(n)}$  získáme

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} R_k^{(n)} & x_k^{(n)} \\ x_k^{(n)T} & Z_k^{(n)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ -\hat{\theta}_k^{(n)T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_k^{(n)} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ -\hat{\theta}_k^{(n)T} & 1 \end{bmatrix}^T = \\
&= \begin{bmatrix} R_k^{(n)} & -R_k^{(n)}\hat{\theta}_k^{(n)} \\ -\hat{\theta}_k^{(n)T}R_k^{(n)} & \hat{\theta}_k^{(n)T}R_k^{(n)}\hat{\theta}_k^{(n)} + \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (3.215)
\end{aligned}$$

Tato struktura je označována jako „vnořená struktura“ [38] jelikož submatice  $R_k^{(n)}$  odkazující na  $\mathcal{M}_k^{(n-1)}$ , jak bude dále dokázáno, je současně vnořená v  $\mathcal{M}_k^{(n)}$ . Zavedeme vektor  $U_k^{(i)}$  respektující schéma

$$U_k^{(i)} = [u_{k-n+i}, u_{k-n-1+i}, \dots, u_{1-n+i}]^T \quad (3.216)$$

Pro matici pozorování  $H_k^{(n)}$  ve vztahu k  $U_k^{(n)}$  a  $\Phi_k^{(n-1)}$  píšeme

$$\begin{aligned}
H_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} \varphi_k^{(n-1)T} \\ \varphi_{k-1}^{(n-1)T} \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)T} \end{bmatrix} U_k^{(n-1)} = \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_k^{(n-1)} & U_k^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.217)
\end{aligned}$$

Odtud můžeme rozložit vnořenou submatici  $R_k^{(n)}$  podobným způsobem jako  $\mathcal{M}_k^{(n)}$  v případě (3.215), čímž získáme

$$\begin{aligned}
R_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k^{(n-1)} & \Phi_k^{(n-1)T} Q_k U_k^{(n-1)} \\ U_k^{(n-1)T} Q_k \Phi_k^{(n-1)} & \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \sigma^{-2} + U_k^{(n-1)T} Q_k U_k^{(n-1)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} I_{2n-1} & 0 \\ -\hat{\alpha}_k^{(n)T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n-1} & 0 \\ -\hat{\alpha}_k^{(n)T} & 1 \end{bmatrix}^T = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k^{(n-1)} & -\mathcal{M}_k^{(n-1)}\hat{\alpha}_k^{(n)} \\ -\hat{\alpha}_k^{(n)T}\mathcal{M}_k^{(n-1)} & \hat{\alpha}_k^{(n)T}\mathcal{M}_k^{(n-1)}\hat{\alpha}_k^{(n)} + \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (3.218)
\end{aligned}$$

kde nejlepší odhad  $\hat{\alpha}_k^{(n)}$  zpětného modelu  $n$ -tého řádu je určen rovnicí

$$\hat{\alpha}_k^{(n)} = -\left( \Phi_k^{(n-1)T} Q_k \Phi_k^{(n-1)} \right)^{-1} \Phi_k^{(n-1)T} Q_k U_k^{(n-1)} \quad (3.219)$$

a tomu odpovídá minimální hodnota kvadratické kritériální funkce s ohledem na  $\hat{\alpha}_k^{(n)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) &= \left( \prod_{j=1}^k \lambda_e \right) \sigma^{-2} + U_k^{(n-1)T} Q_k \left( U_k^{(n-1)} + \Phi_k^{(n-1)} \hat{\alpha}_k^{(n)} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_k^{(n)T} & 1 \end{bmatrix} R_k^{(n)} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_k^{(n)} \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.220)$$

Tímto je důkaz o mnohamodelové estimaci prakticky hotov. Jelikož matice  $\mathcal{M}_k^{(i)}$  a  $R_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) jsou ve smyslu (3.215) a (3.218) vzájemně provázané, můžeme tvrdit, že matice  $\mathcal{M}_k^{(i)}$  současně zaznamenává informace o všech procesních parametrech. Pro snadnější dostupnost parametrů rozložíme přímo vnořenou strukturu ACM  $\mathcal{C}_k^{(i)}$ . Uvážíme-li, že  $\mathcal{C}_k^{(n)} = (\mathcal{M}_k^{(n)})^{-1}$  a  $P_k^{(n)} = (R_k^{(n)})^{-1}$ , pak pro  $\mathcal{C}_k^{(n)}$  získáme

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} I_{2n} & \hat{\theta}_k^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k^{(n)} & 0 \\ 0 & \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n} & \hat{\theta}_k^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} P_k^{(n)} + \hat{\theta}_k^{(n)} \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \right)^{-1} \hat{\theta}_k^{(n)T} & \hat{\theta}_k^{(n)} \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \right)^{-1} \\ \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \right)^{-1} \hat{\theta}_k^{(n)T} & \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)}(\hat{\theta}_k^{(n)}) \right)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.221)$$

Podobně rozkládáme vnořenou submatici  $P_k^{(n)}$ . Postup rozkladu vnořených částí ACM  $\mathcal{C}_k^{(n)}$  provádíme až do okamžiku, kdy dosáhneme  $\mathcal{C}_k^{(0)}$

$$\begin{aligned}P_k^{(n)} &= \begin{bmatrix} I_{2n-1} & \hat{\alpha}_k^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_k^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n-1} & \hat{\alpha}_k^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_k^{(n-1)} + \hat{\alpha}_k^{(n)} \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \right)^{-1} \hat{\alpha}_k^{(n)T} & \hat{\alpha}_k^{(n)} \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \right)^{-1} \\ \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \right)^{-1} \hat{\alpha}_k^{(n)T} & \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)}(\hat{\alpha}_k^{(n)}) \right)^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.222)$$

$\vdots$

$$\mathcal{C}_k^{(0)} = \left( \mathcal{V}_{fk}^{(0)}(\hat{\theta}_k^{(0)}) \right)^{-1}\quad (3.223)$$

Všimněme si, že řešení postupného rozkladu všech vnořených částí  $\mathcal{C}_k^{(n)}$  podle me-

chanismu (3.221) a (3.222) produkuje maticové vyjádření

$$\mathcal{C}_k^{(n)} = \quad (3.224)$$

$$= \begin{bmatrix} I_{2n} & \hat{\theta}_k^{(n)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n-1} & \hat{\alpha}_k^{(n)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} & 0 \\ & I_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \hat{\alpha}_k^{(1)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} & 0 \\ & I_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \mathcal{V}_{fk}^{(0)} \left( \hat{\theta}_k^{(0)} \right) \right)^{-1} \\ \left( \mathcal{V}_{bk}^{(1)} \left( \hat{\alpha}_k^{(1)} \right) \right)^{-1} \\ \vdots \\ \left( \mathcal{V}_{bk}^{(n)} \left( \hat{\alpha}_k^{(n)} \right) \right)^{-1} \\ \left( \mathcal{V}_{fk}^{(n)} \left( \hat{\theta}_k^{(n)} \right) \right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \hat{\alpha}_k^{(1)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} & 0 \\ & I_{2n-1} \end{bmatrix}^T \cdots \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n-1} & \hat{\alpha}_k^{(n)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} & 0 \\ & I_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{2n} & \hat{\theta}_k^{(n)} \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}^T = \\ = \left[ U_{2n(k)} U_{2n-1,(k)} \cdots U_{1(k)} \right] D_{Ck} \left[ U_{2n(k)} U_{2n-1,(k)} \cdots U_{1(k)} \right]^T \quad (3.225)$$

Výpočet součinu horních trojúhelníkových matic vystupujících v 3.225 vede na tvar již dříve definované matice parametrů

$$\mathcal{U}_k = \left[ U_{2n(k)} U_{2n-1,(k)} \cdots U_{1(k)} \right] \quad (3.226)$$

Diagonální matice  $D_{Ck}$  představuje inverzní matici k matici kritériálních funkcí

$$\mathcal{D}_k = D_{Ck}^{-1} \quad (3.227)$$

Známe-li hodnoty odmocnin diagonálních vstupů matice  $D_{Ck}$ , můžeme tvar zápisu (3.225) ekvivalentně nahradit součinem Choleského trojúhelníků podle

$$\mathcal{C}_k = U_{Ck} D_{Ck}^{1/2} \left( U_{Ck} D_{Ck}^{1/2} \right)^T = S_{Ck} S_{Ck}^T \quad (3.228)$$

U konvenčních metod nejmenších čtverců může přeparametrizování podmínit singularitu kovarianční matice, a tím snadno narušit správnou funkčnost aplikace, jejíž činnost závisí na výsledku metody nejmenších čtverců. Nasazení konvenční metody nejmenších čtverců proto vyžaduje apriorní znalost strukturních parametrů. Informace o strukturních parametrech však v praktických úlohách obvykle není dopředu známa a její vyšetření je nezbytným prvním krokem.



Oproti tomu mnohamodelová identifikace metodou nejmenších čtverců přirozeně předchází problémům spojených s přeparametrizováním ve snaze postihnout skutečný řád modelu procesu. V důsledku své speciální struktury metoda separuje odhady modelů jednotlivých řádů a zabraňuje pronikání numerických problémů, vystávajících spolu s odhadováním modelů vyšších řádů, do výpočtu modelů řádů nižších [28]. Důkaz tohoto tvrzení jednoduše provedeme, vyjádříme-li AIM  $\mathcal{M}_k$  jako blokovou matici vzniklou součinem svých faktorů ve tvaru (pro přehlednost bude vynechán časový index)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} U_{C11} & U_{C12} \\ 0 & U_{C22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{C11} & 0 \\ 0 & D_{C22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C11} & U_{C12} \\ 0 & U_{C22} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} U_{C11}^{-1} & -U_{C11}^{-1}U_{C12}U_{C22}^{-1} \\ 0 & U_{C22}^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{C11}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{C22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C11}^{-1} & -U_{C11}^{-1}U_{C12}U_{C22}^{-1} \\ 0 & U_{C22}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.229)$$

Ze vztahu (3.229) plynou následující rovnosti

$$\mathcal{M}_{11} = U_{C11}^{-T} D_{C11}^{-1} U_{C11}^{-1} \quad (3.230)$$

$$U_{C12}U_{C22}^{-1} = -\left(U_{C11}^{-T} D_{C11}^{-1} U_{C11}^{-1}\right)^{-1} \mathcal{M}_{12} \quad (3.231)$$

$$U_{C22}^{-T} D_{C22}^{-1} U_{C22}^{-1} = \mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21} \left(U_{C11}^{-T} D_{C11}^{-1} U_{C11}^{-1}\right)^{-1} \mathcal{M}_{12} \quad (3.232)$$

na jejichž základě lze vyvodit:

1. Bez ztráty obecnosti uvažujme dimenzi submatice  $\mathcal{M}_{11} \in \mathbb{R}^{(2i+1) \times (2i+1)}$  pro  $i \in [1, n)$ . Potom  $\mathcal{U}_{11} = U_{C11}$  a  $\mathcal{D}_{11} = D_{C11}^{-1}$  poskytují všechny informace o procesních parametrech a kritériálních funkcích modelů všech nižších řádů až po  $i$ -tý řád. Protože výpočet  $\mathcal{U}_{11}$  a  $\mathcal{D}_{11}$  závisí pouze na  $\mathcal{M}_{11}$  a je nezávislý na odhadech modelů vyšších řádů, numerické problémy vystupující v  $U_{C12}$ ,  $U_{C22}$  a  $D_{C22}$  nezasahují do výpočtu  $\mathcal{U}_{11}$  a  $\mathcal{D}_{11}$ .
2. Na druhou stranu, přesnost estimace modelů nižších řádů a numerické problémy s jejich odhadem spojené jsou přenášeny na odhady modelů řádů vyšších. Tedy odhady zastoupené v  $U_{C11}$  a  $D_{C11}$  společně s informací nesenou v datech  $\mathcal{M}_{12}$ ,  $\mathcal{M}_{21}$  a  $\mathcal{M}_{22}$  ve výsledku ovlivňují konečný tvar modelů obsažených v  $U_{C12}$  a  $U_{C22}$ .

Z těchto závěrů je patrné, že přeparametrizování, pokud k němu dojde, nepředstavuje problém pro popsanou techniku mnohamodelové estimace je-li prováděna spolu s některou z technik faktorizace. Naopak, je úmyslně praktikováno, neboť cílem je zjistit efektivní řád modelu a současně pokrýt jeho případné časové změny. Důsledkem přeparametrizování, a tím singularity, je nulová hodnota některých diagonálních vstupů matice kritériálních funkcí [30]. Pro správnou činnost metody je tedy nutné

ošetřit vlastnosti algoritmů provádějících ortogonální transformaci. V případě, kdy rozklad zaznamená kritériální funkci blížící se svou hodnotou nule, může být výpočet ukončen, neboť potřebné informace o charakteru procesu jsou již zřejmě obsaženy ve faktorech získaných do této fáze rozkladu. Připomeňme, že kritériální funkce jsou vyhodnocovány postupně od nejnižšího až po nejvyšší řád modelu. Pokud se přesto zajímáme o přeparametrizované modely, dostatečně zesílíme význam regularizace tak, jak bylo popisováno v souvislosti s kvadratickou formou (3.18).

### 3.5 Modely s chybou rovnice

Mnohamodelová identifikace je charakteristická jak svou kompaktní strukturou výpočtu, tak svým specifickým uspořádáním měřených (popř. odhadovaných) dat ve vektoru pozorování. Výběr skladby a způsob utřídění elementů v rozšířeném vektoru pozorování je odvozen od typu zvoleného vstupně výstupního modelu. Dalece nejrozšířenějším modelem z řady modelů s chybou rovnice, který byl již dříve spojován s mnohamodelovou identifikací, je model ARX. Model ARX popisuje následující lineární diferenční rovnice doplněná o chybový člen

$$\begin{cases} y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} + \xi_k \\ \xi_k = e_k \end{cases} \quad (3.233)$$

Vyjádříme-li ARX model svým přenosem, můžeme si všimnout, že tvarovací filtr náhodné složky  $e_k$  je implicitně definován procesem AR. Ačkoliv se model nevyznačuje výjimečnou realističností a schopností postihnout strukturu široké škály reálných procesů, vyniká určitou vlastností, totiž predikovaná střední hodnota výstupu modelu je lineární funkcí pouze měřených dat. K odhadování parametrů tak může být použito přímo lineární regrese. Rozšířený vektor pozorování, nebo rovněž rozšířený regresor je určen tvarem

$$\varphi_k = [-y_{k-n}, u_{k-n}, \dots, -y_{k-1}, u_{k-1}, -y_k]^T \quad (3.234)$$

Vnitřní popis ARX modelu vyjádřený v kanonickém tvaru vzhledem k výstupu zachycuje zápis

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -a_n & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \\ -a_n \end{bmatrix} e_k \\ y_k &= [1, 0, \dots, 0, 0] \theta_k + e_k \end{aligned} \quad (3.235)$$

kde vektor  $\theta_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  zastupuje vnitřní stavy modelu. Pro filtraci stavů tohoto modelu navrženým přístupem rozšířené filtrace metodou nejmenších čtverců je nutné obměnit postup sestavení AIM  $\mathcal{M}_k$  (3.55). V případě rekonstrukce stavu Kalmanovým filtrem se musíme vhodnou úpravou filtru vypořádat s vzájemnou korelací procesního šumu a šumu měření.

Hlavním nedostatkem ARX modelu je možnost pouze omezeného modelování stochastické složky  $e_k$ . Neměřitelná veličina  $\xi_k$  vstupující do modelu zahrnuje vlastní nedokonalost modelu, neřízený přenos energií vně a do systému a neměřitelné rušivé vlivy. Obecně tak veličina  $\xi_k$  nemusí mít vlastnost bílého šumu. Předpokládejme, že veličina  $\xi_k$  je generovaným výstupem procesu MA. Abychom zajistili nestrannost odhadu, modelujeme chybu rovnice tímto procesem a získáme

$$\begin{cases} y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n} + \xi_k \\ \xi_k = e_k + c_1 e_{k-1} + \dots + c_n e_{k-n} \end{cases} \quad (3.236)$$

popis modelu ARMAX [27, 43]. V porovnání s modelem ARX je ARMAX model flexibilnější, protože disponuje rozšířeným modelem stochastické části procesu (tj. části, do které vstupuje  $e_k$ ). Na druhou stranu toto rozšíření neumožňuje lineární regresi, neboť hypoteticky bílá veličina  $e_k$  je neměřitelná a je tak nahrazována svými odhady závisujícími na hodnotách parametrů. Tuto závislost nazýváme pseudolineární regresi. Rozšířený regresor vyhovující požadavkům mnohamodelové identifikace je definován jako [31]

$$\varphi_k = \left[ -y_{k-n}, \hat{e}_{k-n}, u_{k-n}, \dots, -y_{k-1}, \hat{e}_{k-1}, u_{k-1}, -y_k \right]^T \quad (3.237)$$

kde  $\hat{e}_k$  představuje odhad veličiny  $e_k$ . Na rozdíl od modelu ARX, kde jsou komponenty vektoru  $\varphi_k$  poskládány po párech  $\{y_k, u_k\}$ , model ARMAX skládá  $\varphi_k$  po trojicích  $\{y_k, \hat{e}_k, u_k\}$ . Toto schéma uspořádání se ve výsledku promítá i na formování matice parametrů  $\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{(3n+1) \times (3n+1)}$  a matice kritériálních funkcí  $\mathcal{D}_k \in \mathbb{R}^{(3n+1) \times (3n+1)}$ . Vyšetřované parametry ARMAX modelu  $\{a_j, c_j, b_j\}_{j=1}^i$   $i$ -tého řádu nalezneme v  $(3i+1)$ -tém sloupci  $\mathcal{U}_k$ , kde  $i \in [1, n]$ . Potom diagonální vstup matice  $\mathcal{D}_k$  na pozici  $(3i+1)$  pro  $i \in [1, n]$  uchovává hodnotu kritériální funkce korespondující s ARMAX modelem  $i$ -tého řádu. Stavové vyjádření ARMAX modelu

v kanonickém tvaru vzhledem k výstupu je dáno podle

$$\begin{aligned}
\theta_{k+1} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -a_n & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ c_n - a_n \end{bmatrix} e_k = \\
&= \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -c_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -c_n & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} \\ c_n - a_n \end{bmatrix} y_k \\
y_k &= [1, 0, \dots, 0, 0] \theta_k + e_k
\end{aligned} \tag{3.238}$$

Posledním prezentovaným modelem a současně nejobecnějším modelem ze třídy modelů s chybou rovnice je model ARARMAX. Model předpokládá vývoj chyby  $\xi_k$  podle procesu ARMA, tedy

$$\begin{cases} y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \cdots + b_n u_{k-n} + \xi_k \\ \xi_k + d_1 \xi_{k-1} + \cdots + d_n \xi_{k-n} = e_k + c_1 e_{k-1} + \cdots + c_n e_{k-n} \end{cases} \tag{3.239}$$

a tomu odpovídá tvar rozšířeného vektoru pozorování

$$\varphi_k = [-y_{k-n}, -\hat{\xi}_{k-n}, \hat{e}_{k-n}, u_{k-n}, \dots, -y_{k-1}, -\hat{\xi}_{k-1}, \hat{e}_{k-1}, u_{k-1}, -y_k]^T \tag{3.240}$$

kde  $\hat{\xi}_k$  odhaduje chybu  $\xi_k$ . Vektor  $\varphi_k$  je uspořádán do čtveřic  $\{y_k, \hat{\xi}_{k-1}, \hat{e}_k, u_k\}$ , přičemž pořadí druhého a třetího členu ve čtveřici je libovolně zaměnitelné. Pro tento model jsou výsledky odhadů  $i$ -tého řádu uloženy vždy v  $(4i+1)$ -tém sloupci matice  $\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{(4n+1) \times (4n+1)}$ , čemuž odpovídají hodnoty kritériálních funkcí na  $(4i+1)$ -tém diagonálním vstupu matice  $\mathcal{D}_k \in \mathbb{R}^{(4n+1) \times (4n+1)}$  s  $i \in [1, n]$ . Studium rovnice (3.239) podkřývá skutečnost, že z představených modelů model ARARMAX teoreticky umožňuje nejkomplexnější popis vlastností procesu. Jednou z možností jak vyjádřit dynamické vlastnosti modelu (3.239) stavovým popisem, je úprava rozdělující výstup na dvě složky

$$y_k = y_{1(k)} + \xi_k \tag{3.241}$$

Ze vztahu (3.241) pozorujeme, že jedna složka je přímo chyba  $\xi_k$ . Nyní transformu-

jeme diferenční rovnici zastoupenou částí výstupu  $y_{1(k)}$  na stavový popis

$$\theta_{1(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -a_n & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \theta_{1(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}}_{B_1} u_k$$

$$y_{1(k)} = [1, 0, \cdots, 0, 0] \theta_{1(k)} \quad (3.242)$$

a podobně určíme stavový popis vývoje chyby  $\xi_k$

$$\theta_{2(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -d_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -d_n & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} \theta_{2(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 - d_1 \\ c_2 - d_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} - d_{n-1} \\ c_n - d_n \end{bmatrix}}_{G_2} e_k$$

$$\xi_k = [1, 0, \cdots, 0, 0] \theta_{2(k)} + e_k \quad (3.243)$$

Výslednou relaci získáme opětovným sloučením  $y_{1(k)}$  a  $\xi_k$  do jediné stavové rovnice modelu

$$\begin{bmatrix} \theta_{1(k+1)} \\ \theta_{2(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1(k)} \\ \theta_{2(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \end{bmatrix} e_k$$

$$y_k = [1, 0, \cdots, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0] \begin{bmatrix} \theta_{1(k)} \\ \theta_{2(k)} \end{bmatrix} + e_k \quad (3.244)$$

Dodejme, že za účelem vybělení chyby predikce můžeme chybu rovnice popsat libovolným vhodně voleným lineárním procesem (AR, MA, ARMA).

### 3.6 Selektivní zapomínání pro mnohamodelovou identifikaci

U rekurzivní varianty rozšířené identifikace metodou nejmenších čtverců (AI-RLS) je informace získaná měřením vstupně výstupních dat postupně akumulována v AIM  $\mathcal{M}_k$  jak ukazuje

$$\mathcal{M}_{k|k} = \mathcal{M}_{k|k-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (3.245)$$

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = \mathcal{M}_{k|k} \quad (3.246)$$

Tento fakt může být vyjádřen i jiným způsobem, totiž

$$\mathcal{C}_{k|k} = \mathcal{C}_{k|k-1} - \frac{\mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1}}{1 + \varphi_k^T \mathcal{C}_{k|k-1} \varphi_k} \quad (3.247)$$

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = \mathcal{C}_{k|k} \quad (3.248)$$

Jak již bylo dříve dokázáno, řešení optimalizačního problému je zprostředkovaně umožněno s využitím akumulované procesní informace plně obsažené v AIM  $\mathcal{M}_k$ , resp. ACM  $\mathcal{C}_k$ . Tyto matice pak explicitně vystupují ve vztahu pro kvadratickou funkci (3.23). Tato výhodná skutečnost bude dále použita ke snadné interpretaci a k návrhu nového datově řízeného selektivního zapomínání.

Protože diagonální vstupy datové dyády  $\varphi_k \varphi_k^T$  jsou vždy nezáporné, budou vlastní čísla AIM  $\mathcal{M}_k$  neklesající a vlastní čísla ACM  $\mathcal{C}_k$  nerostoucí. Jelikož nová informace  $\varphi_{k+1}$  je začleňována do paměti estimátoru v každém kroku se stejným významem, může docházet v průběhu výpočtu k vývoji podle schématu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{k|k} \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{k-1|k-1} \rightarrow \infty \quad (3.249)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{k|k} \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{k-1|k-1} \rightarrow 0 \quad (3.250)$$

čímž algoritmus ztrácí schopnost sledovat časové změny parametrů a může ustrnout ve stavu, ve kterém podněty získané novým měřením nejsou vyhodnocovány v důsledku „přesycení“ efektivní paměti estimátoru. Aby nedocházelo k vypínání činnosti estimátoru, je nutné do výpočtu začlenit mechanismus znehodnocující význam starší informace, a tím teoreticky předejít možnému vývoji podle (3.249) a (3.250). Na druhou stranu, neopatrná strategie zapomínání může v případě nedostatečného vybuzení vyvolat neomezený růst některých elementů v ACM  $\mathcal{C}_k$  a stejně tak vynulování některých elementů v AIM  $\mathcal{M}_k$ . Základní myšlenkou je modifikovat pouze určitou část matice takovým způsobem, který zohledňuje význam měřené informace  $\varphi_{k+1}$ . Navíc v samotném datovém kroku výpočtu nedochází k výrazné informační obměně, protože aktualizací kvantita  $\varphi_k \varphi_k^T$  je maticí s jednotkovou hodnotí. Obecnou formuli zapomínání jednotlivých matic uvedeme zápisem

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_{k|k}, \varphi_{k+1}) \quad (3.251)$$

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{k|k}, \varphi_{k+1}) \quad (3.252)$$

kde  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\cdot)$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  jsou nějaké vektorové funkce upravující informaci v  $\mathcal{M}_{k|k}$ , respektive v  $\mathcal{C}_{k|k}$  na základě  $\varphi_{k+1}$ . Jediným rozdílem mezi rozličnými modifikacemi přístupu rozšířené identifikace ve smyslu zapomínání je právě volba  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\cdot)$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ . Nutno podotknout, že problematika omezeného zapomínání ve spojení s rozšířenou identifikací nebyla doposud vyřešena. Ve své podstatě je omezené zapomínání problémem selekce potlačované informace, a tím určení relativního významu nově příchozí

informace v porovnání s tou již uloženou v paměti estimátoru. Pro případ exponenciálního zapomínání volba funkcí  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\cdot)$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  ovlivňuje časový krok podle

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = \lambda_e \mathcal{M}_{k|k} \quad (3.253)$$

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = \frac{1}{\lambda_e} \mathcal{C}_{k|k} \quad (3.254)$$

Z výše položených rovnic je patrné, že veškerá stará informace je rovnoměrně zapomínána skrze skalární veličinu  $\lambda_e$  bez ohledu na informační obsah nových dat  $\varphi_{k+1}$ . Hledáme proto strategii zapomínání, která vhodným způsobem řídí význam s jakým data  $\varphi_{k+1}$  modifikují již akumulovanou informaci. Zamyslíme-li se nad funkcí a vnitřním uspořádáním AIM  $\mathcal{M}_k$  a ACM  $\mathcal{C}_k$ , lze vyvodit, že při úspěšné identifikaci matice parametrů  $\mathcal{U}_k$  postupně konverguje ke konstantní matici. Míra akumulované informace se potom odráží od matice kritériálních funkcí  $\mathcal{D}_k$  [29]. Sledovací schopnosti estimátoru jsou tak ve výsledku kontrolovány volbou úpravy diagonální matice  $\mathcal{D}_k$ . V důsledku tohoto rozboru namísto matic  $\mathcal{M}_k$  a  $\mathcal{C}_k$  modifikujeme pouze  $D_{\mathcal{M},k|k}$  a  $D_{\mathcal{C},k|k}$

$$D_{\mathcal{M},k+1|k} = \mathcal{G}_{\mathcal{M}}(D_{\mathcal{M},k|k}, \varphi_{k+1}) \quad (3.255)$$

$$D_{\mathcal{C},k+1|k} = \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(D_{\mathcal{C},k|k}, \varphi_{k+1}) \quad (3.256)$$

kde funkce  $\mathcal{G}_{\mathcal{M}}(\cdot)$  a  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  jsou analogické k  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\cdot)$  a  $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\cdot)$  ze vztahů (3.251) a (3.252). Ačkoliv matice  $\mathcal{D}_k$  má evidentní fyzikální význam, otázkou zůstává, jak ocenit informační obsah  $\varphi_{k+1}$  poměrně ke skalárním hodnotám kritériálních funkcí na diagonále matice  $\mathcal{D}_k$ .

V práci budou popsány dva přístupy založené na ortogonální dekompozici vybraných kvantit s požadavkem zamezit ztrátě informace nevybuzené v datovém kroku výpočtu. Oba přístupy budou vhodně propojeny s technikou exponenciálního zapomínání. Ideou samotného exponenciálního zapomínání pro faktorizovanou variantu MMLS je produkovat diagonální matici  $D_{\mathcal{M},k+1|k}$  nebo  $D_{\mathcal{C},k+1|k}$  jednoduše jako výsledek násobení  $D_{\mathcal{M},k|k}$  nebo  $D_{\mathcal{C},k|k}$ , neboť data jsou subjektem časově proměnného vážení. Pro techniku exponenciálního zapomínání dostáváme známé vztahy

$$\mathcal{M}_{k+1|k} = L_{\mathcal{M},k+1|k} D_{\mathcal{M},k+1|k} L_{\mathcal{M},k+1|k}^T = L_{\mathcal{M},k|k} [\lambda_e D_{\mathcal{M},k|k}] L_{\mathcal{M},k|k}^T \quad (3.257)$$

$$\mathcal{C}_{k+1|k} = U_{\mathcal{C},k+1|k} D_{\mathcal{C},k+1|k} U_{\mathcal{C},k+1|k}^T = U_{\mathcal{C},k|k} \left[ \frac{1}{\lambda_e} D_{\mathcal{C},k|k} \right] U_{\mathcal{C},k|k}^T \quad (3.258)$$

Dále se bez ztráty obecnosti omezíme na ARX model. Připomeňme vzájemnou relaci platnou mezi  $D_{\mathcal{M},k|k}$  a  $D_{\mathcal{C},k|k}$  v datovém kroku

$$D_{\mathcal{M},k|k} = \text{diag} \left[ \mathcal{V}_{f,k|k}^{(0)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(0)} \right), \mathcal{V}_{b,k|k}^{(1)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(1)} \right), \dots, \mathcal{V}_{f,k|k}^{(n)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(n)} \right) \right] = D_{\mathcal{C},k|k}^{-1} \quad (3.259)$$

kde horní indexy u kritériálních funkcí a jejich argumentů opět odkazují na řád modelu. Za účelem efektivní implementace selektivního zapomínání nejdříve rozdělme jednotlivé diagonální vstupy matice  $\mathcal{D}_k$  na dvě části, a to na informativní a neinformativní část vzhledem k příchozí informaci v datovém kroku. Jinými slovy, hledáme takové dvě části matice  $\mathcal{D}_k$  z nichž jedna nesmí a druhá může být zapomenuta. V konečném důsledku ve vyšetřovaném případě převádíme problém na hledání částí matic  $\mathcal{M}_{k|k}^{(i)}$  a  $R_{k|k}^{(i)}$  nebo  $\mathcal{C}_{k|k}^{(i)}$  a  $P_{k|k}^{(i)}$  pro  $i \in [1, n]$ , jak naznačuje

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{f,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) &= \mathcal{V}_{f1,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) + \mathcal{V}_{f2,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left( \mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} + \mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)} \right) \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (3.260)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left( \mathcal{C}_{1,k|k}^{(i)} + \mathcal{C}_{2,k|k}^{(i)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.261)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{b,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) &= \mathcal{V}_{b1,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) + \mathcal{V}_{b2,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left( R_{1,k|k}^{(i)} + R_{2,k|k}^{(i)} \right) \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (3.262)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left( P_{1,k|k}^{(i)} + P_{2,k|k}^{(i)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.263)$$

Nejdříve vyšetříme částečný dopad příslé informace kompaktně uchované v  $\varphi_{k+1}$  na vývoj hodnot kritériálních funkcí individuálních modelů, čímž získáme

$$\mathcal{V}_{f,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) = \mathcal{V}_{f,k|k-1}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) + \left( y_{k-n+i} - h_k^{(i)T} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right)^T \left( y_{k-n+i} - h_k^{(i)T} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) \quad (3.264)$$

$$\mathcal{V}_{b,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) = \mathcal{V}_{b,k|k-1}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) + \left( u_{k-n+i-1} + \varphi_k^{(i-1)T} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right)^T \left( u_{k-n+i-1} + \varphi_k^{(i-1)T} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) \quad (3.265)$$

Zapomínání není vhodné aplikovat jednotně na veškerou akumulovanou informaci. Proto v časovém kroku zapomínáme pouze tu část informace, která se nachází ve směru příslušných vektorů  $\varphi_{k+1}^{(i)}$  nebo  $h_{k+1}^{(i)}$  aktualizujících  $\mathcal{V}_{f,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right)$  a  $\mathcal{V}_{b,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right)$ . Řekněme, že neinformativní části funkcí  $\mathcal{V}_{f,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right)$  a  $\mathcal{V}_{b,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right)$  jsou  $\mathcal{V}_{f2,k|k}^{(i)}$  a  $\mathcal{V}_{b2,k|k}^{(i)}$ , potom časový krok bude

$$\mathcal{V}_{f,k+1|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k+1|k}^{(i)} \right) = \mathcal{V}_{f1,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k+1|k}^{(i)} \right) + \lambda_e \mathcal{V}_{f2,k|k}^{(i)} \left( \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \right) \quad (3.266)$$

$$\mathcal{V}_{b,k+1|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k+1|k}^{(i)} \right) = \mathcal{V}_{b1,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k+1|k}^{(i)} \right) + \lambda_e \mathcal{V}_{b2,k|k}^{(i)} \left( \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \right) \quad (3.267)$$

Pro prvního z předvedených přístupů, jak vyplývá z (3.260) a (3.262), hledáme



produkty matic  $\mathcal{M}_{k|k}^{(i)}$  a  $R_{k|k}^{(i)}$  vzniklých ortogonální dekompozicí, které splňují

$$\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} + \mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)} \quad (3.268)$$

$$R_{k|k}^{(i)} = R_{1,k|k}^{(i)} + R_{2,k|k}^{(i)} \quad (3.269)$$

Problémem zůstává, jak sestavit produkty těchto matic. V otázce nastolené problematiky využijeme již dosažených výsledků platných pro ortogonální dekompozici, která je společným prvkem sjednocujícím všechny varianty směrového (selektivního) zapomínání uvedených v práci. Vlastnosti matic  $\mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)}$  a  $R_{2,k|k}^{(i)}$  jsou charakterizovány následujícími rovnicemi

$$\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} = \mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} \quad (3.270)$$

$$R_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} = R_{2,k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} \quad (3.271)$$

Pro zachování platností (3.268) a (3.269) musí matice  $\mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)}$  a  $R_{1,k|k}$  obsahovat výhradně směry ortogonální na data, to je takové, že platí

$$\mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} = 0 \quad (3.272)$$

$$R_{1,k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} = 0 \quad (3.273)$$

a říkáme, že  $\varphi_{k+1}^{(i)} \left( h_{k+1}^{(i)} \right)$  je nulovým prostorem matice  $\mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} \left( R_{1,k|k}^{(i)} \right)$ . S využitím pouze vztahů (3.270), (3.271) a (3.272), (3.273) nemůže být dekompozice sestavena jednoznačně. Za tímto účelem specifikujeme dodatečné podmínky ve významu omezení hodnoty jednotlivých produktů. Protože nová informace přichází v podobě datové dyády, je rozumné zapomínáním modifikovat rovněž pouze matici s jednotkovou hodnotou. S tímto požadavkem získáme jednoznačný tvar produktů informačních matic. Konečná podoba matic  $\mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)}$  a  $R_{2,k|k}^{(i)}$  respektující rovnosti (3.270), (3.271) a současně omezující podmínku kladenou na hodnotu těchto matic je demonstrována následující lemmou [6].

**Lemma 1** *Předpokládejme, že existuje symetrická pozitivně definitní matice  $B$  a známý sloupcový vektor  $b$  takový, že  $b^T B b > 0$ . Úkolem je sestavit dyádu  $A$  pro níž současně platí*

$$A = a a^T \quad (3.274)$$

$$B b = A b \quad (3.275)$$

*Potom úloha má jediné řešení, které je dáno*

$$A = \frac{1}{b^T B b} (B b) (B b)^T \quad (3.276)$$

Důkaz lemmy je následující. Vztah (3.275) vyjádříme jako

$$Bb = aa^T b \quad (3.277)$$

Násobením výše položené rovnice vektorem  $b^T$  zleva získáme

$$a^T b = b^T a = \pm \sqrt{b^T B b} \quad (3.278)$$

Dosazením výsledku (3.278) do (3.277) vede na tvar rovnice

$$Bb = aa^T b = (b^T a) a = \pm \sqrt{b^T B b} a \quad (3.279)$$

Přestože (3.279) má přípustnou dvojici řešení, (3.274) má řešení pouze jediné a to je určeno (3.276).

Odtud nejprve vztah pro  $\mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)}$

$$\mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)} = \frac{(\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}) (\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)})^T}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}} \quad (3.280)$$

Pro zajištění korektního chování algoritmu nemůžeme připustit dělení nulou v (3.280). Tomuto problému předejdeme, nastavíme-li oblast necitlivosti pro vstupující data, ve které zapomínání provádět nebudeme. Zapomínání je aktivováno tehdy, pokud  $\varphi_{k+1}^{(i)}$  je vně vymezené oblasti, proto

$$\mathcal{M}_{k+1|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \quad \left\| \varphi_{k+1}^{(i)} \right\|_1 < \varepsilon \quad (3.281)$$

kde pro  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  je  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , veličina  $\varepsilon$  může být volena s ohledem na úroveň nepřesnosti měření (kvantování). V následujícím textu předpokládáme, že  $\left\| \varphi_{k+1}^{(i)} \right\|_1 \geq \varepsilon$ , jinak postupujeme v souladu s (3.281). Dosazení (3.280) do (3.268) vede na tvar matice  $\mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)}$  podle

$$\mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} - \frac{(\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}) (\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)})^T}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}} \quad (3.282)$$

Abychom zabránili v časovém kroku algoritmu zvyšovat neurčitost ve všech směrech, protože požadavkem je zapomínat pouze ve směru  $\varphi_{k+1}^{(i)}$ , volíme

$$\mathcal{M}_{k+1|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{1,k|k}^{(i)} + \lambda_e \mathcal{M}_{2,k|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} - (1 - \lambda_e) \frac{\mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{M}_{k|k}^{(i)}}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}} \quad (3.283)$$

Postup odvození je samozřejmě platný i pro rozšířené informační matice příslušných zpětných modelů (neboli informační matice dopředných modelů)

$$R_{k+1|k}^{(i)} = \begin{cases} R_{k|k}^{(i)} & \|h_{k+1}^{(i)}\|_1 < \varepsilon \\ R_{k|k}^{(i)} - (1 - \lambda_e) \frac{R_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} h_{k+1}^{(i)T} R_{k|k}^{(i)}}{h_{k+1}^{(i)T} R_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)}} & \|h_{k+1}^{(i)}\|_1 \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.284)$$

Záměrně vynechaná skalární veličina  $\mathcal{M}_{k+1|k}^{(0)}$  zaznamenává pouze jediný směr, tudíž vždy dochází k zapomínání ve směru příšle informace, a proto postačuje, zamezíme-li jejímu vynulování.

Tím je vlastně provedena časová aktualizace rozšířené metody nejmenších čtverců s technikou omezeného exponenciálního zapomínání založeného na dekompozici kritériálních funkcí. Z popisu algoritmu je patrné, že schopnost sledování časového vývoje parametrů je kontrolována právě diagonální maticí kritériálních funkcí, přičemž zapomínání individuálních elementů matice je řízeno informačním obsahem dat. Zatímco stávající přístupy jsou založené pouze na dodatečné úpravě kovarianční matice nebo její inverze, navržené schéma je exaktně provázáno s optimalizačním problémem, rozděluje kritériální funkci na informativní a neinformativní část a přirozeně pracuje v režimu mnohamodelové estimace. Algoritmus vyhodnocuje význam dat zvláště pro každý z modelů s ohledem na celkový objem akumulovaných informací k modelu se vztahujících, čímž nenarušuje jednosměrnou koncepci šíření informace z modelů nižších řádů na modely řádů vyšších.

Obdobné vlastnosti má i druhý z přístupů, který dekomponuje matici kritériálních funkcí nyní s využitím produktů rozšířených kovariančních matic příslušných modelů. Pro dopředné modely hledáme produkty splňující

$$\mathcal{C}_{k|k}^{(i)} = \mathcal{C}_{1,k|k}^{(i)} + \mathcal{C}_{2,k|k}^{(i)} \quad (3.285)$$

$$\mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} = \mathcal{C}_{2,k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} \quad (3.286)$$

$$\mathcal{C}_{1,k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} = 0 \quad (3.287)$$

a pro zpětné modely potom

$$P_{k|k}^{(i)} = P_{1,k|k}^{(i)} + P_{2,k|k}^{(i)} \quad (3.288)$$

$$P_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} = P_{2,k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} \quad (3.289)$$

$$P_{1,k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} = 0 \quad (3.290)$$

Aplikace postupu dekompozice matic  $\mathcal{C}_{k|k}^{(i)}$  a  $P_{k|k}^{(i)}$  analogicky shodného s předcháze-

jícím případem, vede po úpravě na tvar

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{k+1|k}^{(i)} &= \mathcal{C}_{1,k|k}^{(i)} + \frac{1}{\lambda_e} \mathcal{C}_{2,k|k}^{(i)} = \\ &= \mathcal{C}_{k|k}^{(i)} + \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} \frac{\mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{C}_{k|k}^{(i)}}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}}\end{aligned}\quad (3.291)$$

$$P_{k+1|k}^{(i)} = P_{k|k}^{(i)} + \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} \frac{P_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)} h_{k+1}^{(i)T} P_{k|k}^{(i)}}{h_{k+1}^{(i)T} P_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)}}\quad (3.292)$$

Protože v individuálních kritériálních funkcích matice  $\mathcal{C}_{k|k}^{(i)}$  a  $P_{k|k}^{(i)}$  vystupují inverzně, je nutné pro dokončení algoritmu vyřešit

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{k+1|k}^{(i)} &= \left(\mathcal{C}_{k+1|k}^{(i)}\right)^{-1} = \left(\mathcal{C}_{k|k}^{(i)}\right)^{-1} \left(I + \frac{1 - \lambda_e}{\lambda_e} \frac{\mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)T}}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}}\right)^{-1} = \\ &= \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} - (1 - \lambda_e) \frac{\varphi_{k+1}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)T}}{\varphi_{k+1}^{(i)T} \mathcal{C}_{k|k}^{(i)} \varphi_{k+1}^{(i)}}\end{aligned}\quad (3.293)$$

a stejně tak inverzi  $\left(P_{k+1|k}^{(i)}\right)^{-1}$

$$R_{k+1|k}^{(i)} = \left(P_{k+1|k}^{(i)}\right)^{-1} = R_{k|k}^{(i)} - (1 - \lambda_e) \frac{h_{k+1}^{(i)} h_{k+1}^{(i)T}}{h_{k+1}^{(i)T} P_{k|k}^{(i)} h_{k+1}^{(i)}}\quad (3.294)$$

kde jsme pro (3.293) a (3.294) předpokládali platnost  $\|\varphi_{k+1}^{(i)}\|_1 \geq \varepsilon$  a  $\|h_{k+1}^{(i)}\|_1 \geq \varepsilon$ . V opačném případě se časový krok zjednodušuje a k zapomínání nedochází

$$\mathcal{M}_{k+1|k}^{(i)} = \mathcal{M}_{k|k}^{(i)} \quad \|\varphi_{k+1}^{(i)}\|_1 < \varepsilon \quad (3.295)$$

$$R_{k+1|k}^{(i)} = R_{k|k}^{(i)} \quad \|h_{k+1}^{(i)}\|_1 < \varepsilon \quad (3.296)$$

V tomto bodě máme k dispozici dvě varianty selektivního datově řízeného zapomínání. Nezávisle na zvolené modifikaci je výstupem posloupnost hodnot kritériálních funkcí pro  $i \in [1, n]$

$$\mathcal{V}_{f,k+1|k}^{(i)} \left(\hat{\theta}_{k|k}^{(i)}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left(\mathcal{M}_{k+1|k}^{(i)}\right) \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.297)$$

$$\mathcal{V}_{b,k+1|k}^{(i)} \left(\hat{\alpha}_{k|k}^{(i)}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)T} & 1 \end{bmatrix} \left(R_{k+1|k}^{(i)}\right) \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k|k}^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.298)$$

včetně nenulové hodnoty  $\mathcal{V}_{f,k+1|k}^{(0)} \left(\hat{\theta}_{k|k}^{(0)}\right) = \lambda_e \mathcal{M}_{k|k}^{(0)} = \left(1/\lambda_e \mathcal{C}_{k|k}^{(0)}\right)^{-1}$ . Kompletní znalosti diagonální matice

$$D_{\mathcal{M},k+1|k} = \text{diag} \left[ \mathcal{V}_{f,k+1|k}^{(0)} \left(\hat{\theta}_{k|k}^{(0)}\right), \mathcal{V}_{b,k+1|k}^{(1)} \left(\hat{\alpha}_{k|k}^{(1)}\right), \dots, \mathcal{V}_{f,k+1|k}^{(n)} \left(\hat{\theta}_{k|k}^{(n)}\right) \right] \quad (3.299)$$

můžeme využít ke konstrukci  $D_{\mathcal{C},k+1|k}$

$$D_{\mathcal{C},k+1|k} = D_{\mathcal{M},k+1|k}^{-1} \quad (3.300)$$

### 3.7 Shrnutí kapitoly

Kapitola pojednává o rozšířené identifikaci a stavové rekonstrukci (filtraci) lineárního časově variantního dynamického systému. Nasazení filtru estimujícího stavy s prezencí stochastické veličiny je obvykle spojováno s Kalmanovým filtrem minimalizujícím střední kvadratickou chybu odhadu. Nově je formulace problému a navržená technika filtrace představena v rámci třídy metod minimalizujících chybu predikce modelu. Klíčem k formulaci problému je znalost struktury a nestraného odhadu parametrů vstupně výstupního modelu. Při dodržení těchto podmínek, chyba predikce generovaná filtrem tvoří bílou posloupnost. Výpočet odhadu stavů probíhá v kompaktní formě, v souladu s koncepcí rozšířené identifikace ve spojení s lineární metodou nejmenších čtverců. Získané řešení umožňuje jak dávkový výpočet (AF-LS) odhadu stavů, tak současně poskytuje tomu ekvivalentní rekurzivní schéma výpočtu (AF-RLS). Nepřesnost modelu a případný nemodelovaný drift ve vývoji stavů je namísto absolutního lineárního zapomínání kompenzován relativním exponenciálním zapomínáním.

Dále byly v práci rozvedeny faktorizované varianty přístupů rozšířené identifikace a filtrace využívající principy ortogonálních transformací. Bylo ukázáno, jak kvadratický problém vyžadující výpočet inverze rozšířené informační matice vyřešíme s pomocí vhodné formy faktorizace. Pro případ rekurzivního výpočtu dává technika faktorizace vzniknout alternativnímu výpočtu filtrujícího rozšířenou kovarianční popř. informační matici. Z numerického hlediska je taková forma implementace upřednostňována před implementací přímo šířící rozšířenou kovarianční matici. Navíc, v porovnání s klasickou formulací metody nejmenších čtverců, kde faktorizace představuje pouze úpravu předcházející nestabilitě v konvergenci, jsou faktory rozšířené kovarianční matice přímo hledaným řešením s fyzikálním významem.

Forma rozšířené identifikace a filtrace v sobě slučuje řadu užitečných vlastností, a jak bylo v práci dokázáno, umožňuje potenciálně řešit širokou škálu inženýrských problémů zahrnujících identifikaci a stavovou rekonstrukci. Jako významnější výsledek práce lze považovat propojení techniky selektivního zapomínání s přístupem mnohamodelové identifikace metodou nejmenších čtverců. Konstantní zapomínání již dále nepředstavuje problém pro mnohamodelovou paralelní identifikaci ohrožující numerickou spolehlivost výpočtu. Vhodnou formulací problému bylo dosaženo

zdokonalení exponenciálního zapomínání způsobem omezení zapomínání na tu část staré informace, která bude modifikována v následujícím datovém kroku výpočtu.

## Kapitola 4

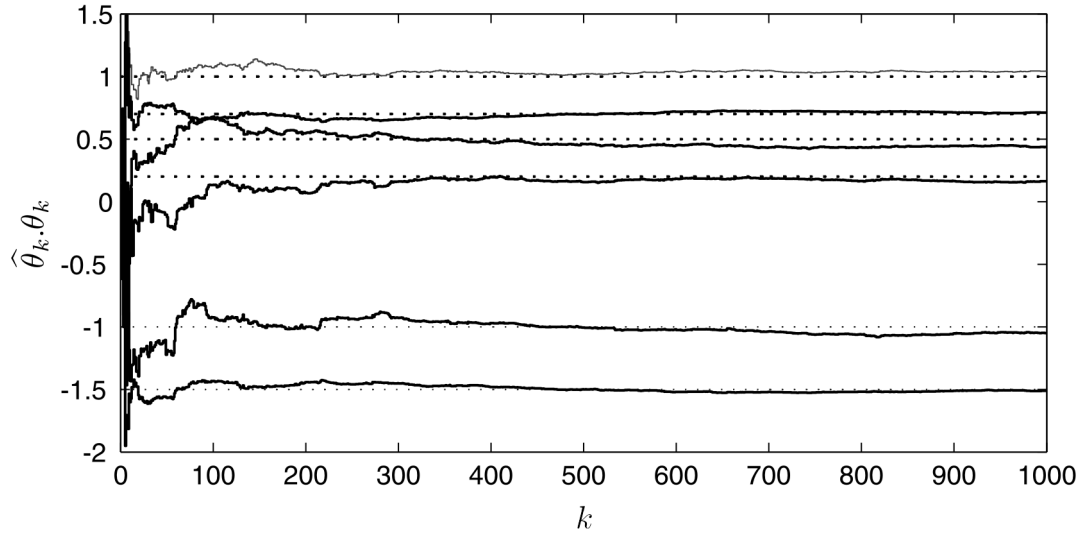
### Komentované výsledky simulací

Jedním z přínosů teoretické části práce byl návrh algoritmu stavového filtru EF-AUDF-RLS (rozšířená UD filtrace rekurzivní metodou nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním), který umožňuje vyhodnocovat procesní informaci uchovanou v rozšířené kovarianční matici. Nyní budou demonstrovány teoretické vlastnosti tohoto filtru na příkladu simulace. Filtr byl implementován v součinnosti s metodou identifikace EF-AUDI-RLS poskytující aktuální odhady parametrů modelu filtru v každém kroku výpočtu. Chování procesu v numerickém příkladu zastupuje časově invariantní diskretní model ve tvaru

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} e_k \\ y_k = [1, 0] \theta_k + e_k \end{cases} \quad (4.1)$$

kde  $\theta_k \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  je vektor stavů,  $e_k$  je bílý šum s vlastnostmi  $e_k \sim N(0; 0.25)$ . Vstupní signál je tvořen náhodnou binární posloupností nul a jedniček. Počáteční hodnota stavů je volena jako  $\theta_0 = [0.5, -0.5]^T$ . Protože reálné počáteční hodnoty stavů obvykle nejsou dopředu známy, stejně jako počáteční hodnoty parametrů modelu, jsou nahrazovány svými apriorními odhady. V obou případech byly počáteční hodnoty parametrů a stavů substituovány nulovými vektory. Rovněž v obou případech, jak pro algoritmus identifikace, tak pro algoritmus stavové filtrace bylo vždy s odpovídajícím rozměrem voleno  $P_0 = 1000I$ .

Předpokládejme, že chyba rovnice je u (4.1) modelována procesem MA. Abychom mohli teoreticky získat nestranný odhad, použijeme uspořádání rozšířeného regresoru vstupně výstupního modelu podle (3.237). Průběh identifikovaných parametrů modelu druhého řádu (s faktorem zapomínání  $\lambda_e = 1$ ) zaznamenává graf na obr. 4.1. Odkud lze pozorovat, že jednotlivé odhady parametrů konvergují ke svým skutečným

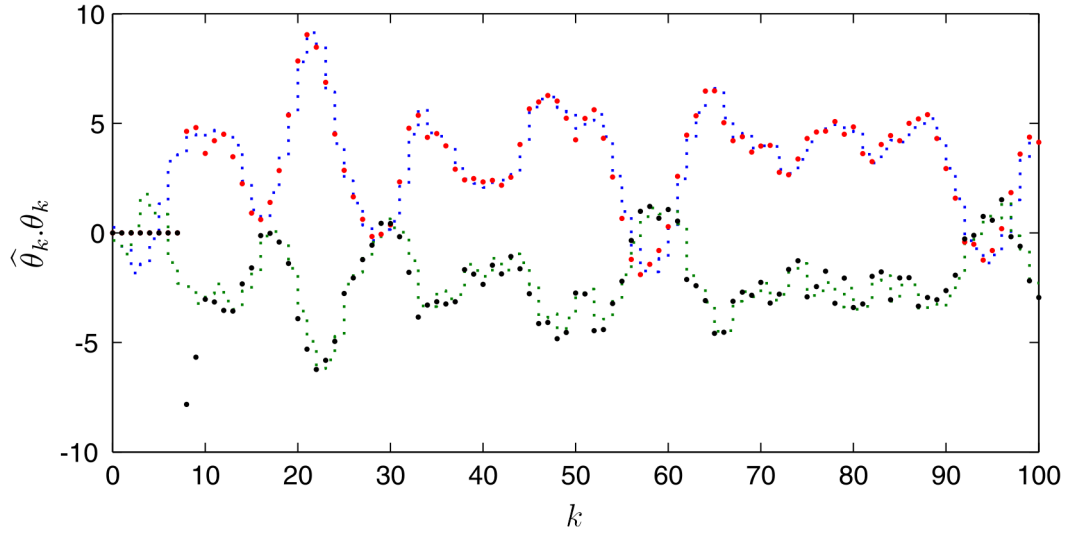


Obr. 4.1: Průběh konvergence parametrů modelu (4.1) s využitím metody EF-AUDI-RLS. V kontextu tohoto grafu vektory  $\hat{\theta}_k$  a  $\theta_k$  zastupují odhady a skutečné hodnoty parametrů modelu.

hodnotám. Jak již bylo dříve zmíněno, požadovanou vlastností filtru je schopnost kompenzovat neurčitost ve vývoji stavového vektoru vyvolanou nepřesností modelu a rušivými náhodnými vlivy. Tuto situaci ilustruje průběh estimace stavů v grafu na obr. 4.2, kde filtr EF-AUDF-RLS nepracuje s přesnými bodovými odhady parametrů modelu, ale tyto jsou metodou identifikace přenášeny do filtru s určitou mírou nepřesnosti. Přesto filtr EF-AUDF-RLS konverguje ke skutečnému průběhu hodnot stavů. Pro zachování přehlednosti bylo vykresleno pouze prvních sto kroků výpočtu, které, jak znázorňuje graf na obr. 4.1, jsou nejvíce zatíženy nepřesností modelu v důsledku počáteční konvergence metody identifikace. Robustnosti filtru je dosaženo umělým navyšováním nejistoty odhadovaných stavů prostřednictvím techniky exponenciálního zapomínání, která snižuje význam méně relevantních starších pozorování, a tím omezuje efektivní počet dat využívaných filtrem. V tomto případě byl pro filtr faktor zapomínání nastaven podle  $\lambda_e = 0.9$ .

V dalším numerickém příkladu, který je modifikací příkladu uvedeného v [6], jsou porovnávány navržené přístupy omezených exponenciálních zapomínání. Bude ukázáno, že vlastnosti metod využívajících dekompozici matice kritériálních funkcí  $\mathcal{D}_k$  propojených s mnohamodelovou identifikací jsou velmi blízké vlastnostem vybrané metody směrového zapomínání využívajícího dekompozici informační matice společně s mnohonásobným faktorem zapomínání (2.45). Pro snazší orientaci v textu bude zápis REFC označovat omezené exponenciální zapomínání vycházející ze zna-





Obr. 4.2: Průběh konvergence vnitřních stavů modelu (4.1) s využitím metody EF-AUDF-RLS. Přerušovaná čára zachycuje skutečný vývoj stavů a vyznačené body pak jejich odhady v příslušných okamžicích.

losti ACM  $\mathcal{C}_k^{(i)}$  (pro  $i = 1, \dots, n$ ), zápis  $\text{REFM}$  potom bude odkazovat na omezené exponenciální zapomínání využívající k rozkladu matice  $\mathcal{D}_k$  matic AIM  $\mathcal{M}_k^{(i)}$  (pro  $i = 1, \dots, n$ ) a směrové zapomínání podle (2.45) ponese zkráceně značení  $\text{RMEFR}$ . Identifikovaný časově variantní proces zastupuje lineární diferenční rovnice ve tvaru

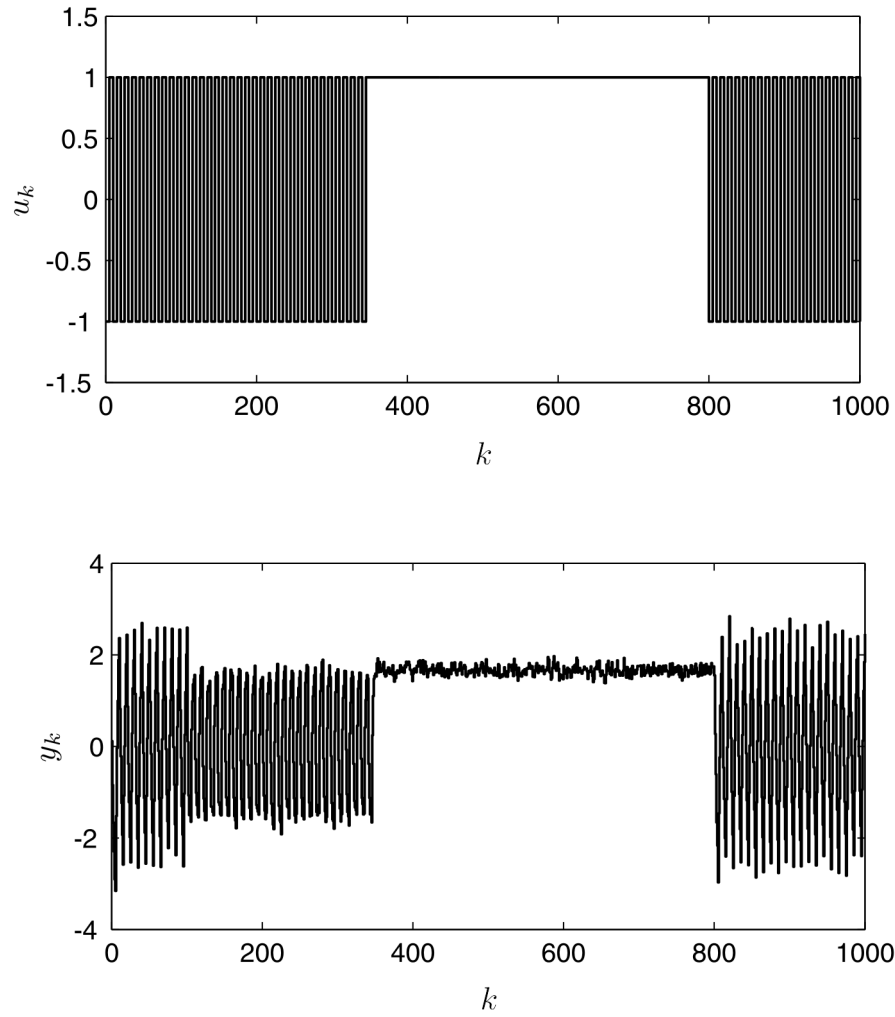
$$y_k + a_k y_{k-1} = b u_{k-1} + e_k \quad (4.2)$$

kde  $e_k$  je bílý šum mající vlastnosti  $e_k \sim N(0; 0.01)$ . Vývoj parametru  $a_k$  zachycuje schéma

$$a_k = \begin{cases} -0.8 & 0 \leq k \leq 100 \cup 800 \leq k \leq 1000 \\ -0.4 & 100 < k < 800 \end{cases} \quad (4.3)$$

Parametr  $b$  má v průběhu simulace neměnnou hodnotu a je roven  $b = 1$ . Signál vstupující do procesu je persistentně budící v časových intervalech  $0 \leq k \leq 350$  a  $800 \leq k \leq 1000$ . Pro zkoumané případy  $\text{REFC}$ ,  $\text{REFM}$  a pro všechna  $k \geq 0$  byly z důvodu korektního porovnání voleny stejné podmínky simulace. Počáteční hodnota odhadovaných parametrů modelu (4.2), kovarianční matice a faktor exponenciálního zapomínání byly určeny jako  $\hat{\theta}_0 = [0, 0]^T$ ,  $P_0 = 1000I$  a  $\lambda_e = 0.87$ . Podobně byl nastaven i algoritmus zapomínání podle  $\text{RMEFR}$ . Tento však namísto se skalární veličinou  $\lambda_e$  pracuje s diagonální maticí exponenciálního zapomínání podle

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.87 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$



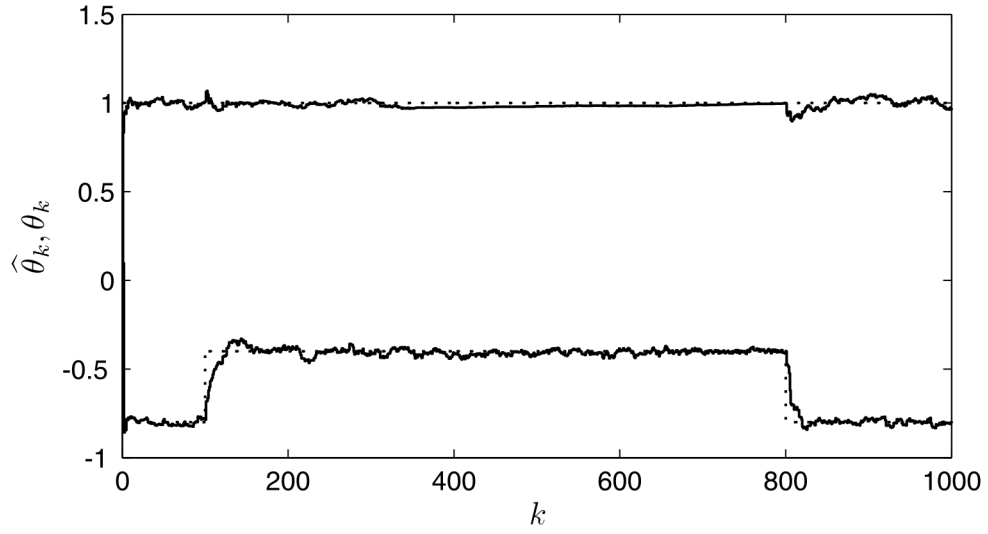
Obr. 4.3: Signál vstupující do procesu (horní graf) a tomu odpovídající výstupní odezva (dolní graf).

a tomu odpovídá plnění regresoru  $h_k = [u_{k-1}, -y_{k-1}]^T$ .

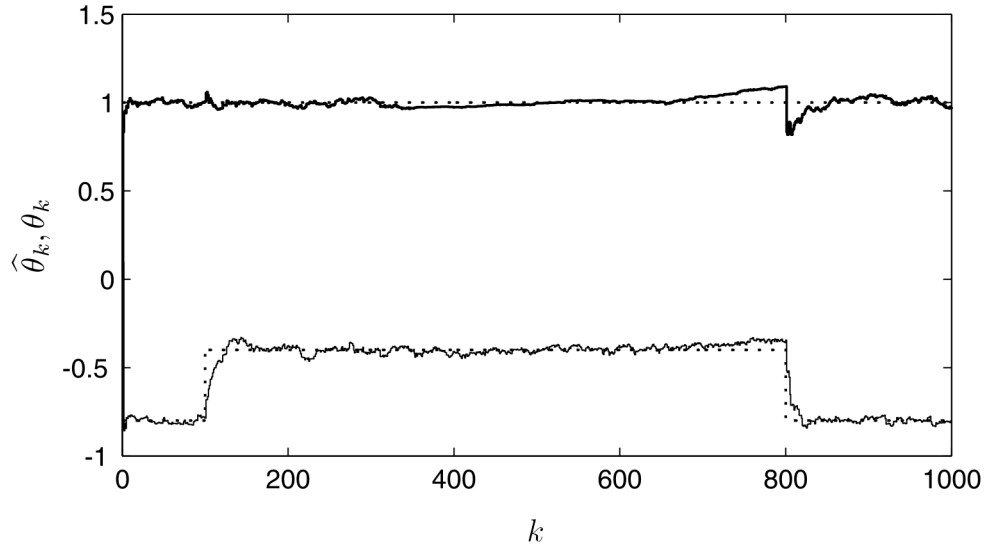
Průběhy identifikovaných parametrů jednotlivými metodami jsou zobrazeny v grafech na obr. 4.4-4.6. Z průběhů můžeme vyvodit, že schopnost sledovat časový vývoj parametrů je u všech metod v podstatě stejná. Všechny přístupy jsou schopné sledovat skokové změny v parametrech a současně překonávají stav nevybuzení, kdy vstup do procesu je konstantní a data v sobě nenesou dostatečné množství informací.

Opakujeme-li experiment s klasickým přístupem exponenciálního zapomínání, pak zapomínání celé matice  $\mathcal{D}_k$  vede na výsledky podle grafu na obr. 4.7. Tento průběh zachycuje jev, kdy se algoritmus stává citlivým na působení šumu v důsledku ztráty důležité informace o charakteru procesu. Chování algoritmu je tak v ostrém

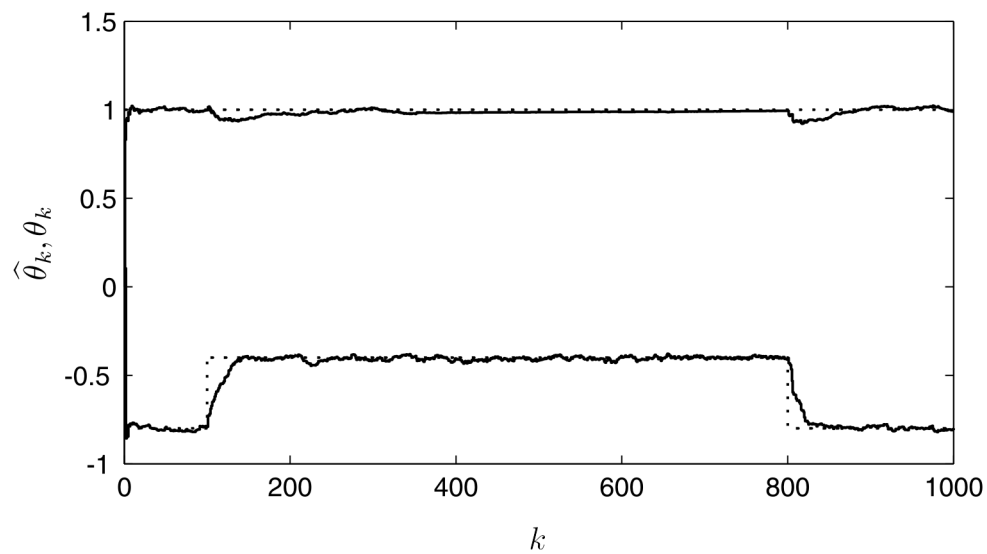
kontrastu s navrženými schématy selektivního zapomínání (REFC a REF $\mathcal{M}$ ), které zabráňují přebuzení rozšířené kovarianční matice.



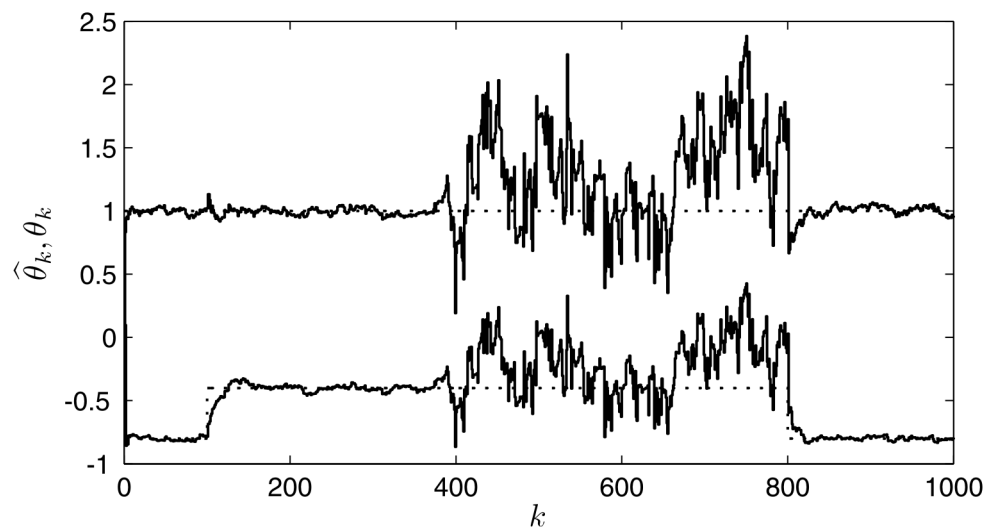
Obr. 4.4: Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání REFC



Obr. 4.5: Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání REF $\mathcal{M}$



Obr. 4.6: Průběh sledování parametrů s technikou zapomínání RMEFR



Obr. 4.7: Průběh sledování parametrů s technikou klasického exponenciálního zapomínání EF.

# Kapitola 5

## Závěr

V praxi přesná informace o časově nestálých hodnotách kovariančních matic procesního šumu a šumu měření obvykle není dostupná. Z tohoto důvodu aplikace mechanismu vyšetřujícího nejlepší odhady parametrů ve smyslu střední kvadratické chyby odhadu je obtížně realizovatelná. Tato skutečnost motivuje k vývoji metodiky tvořící vlastní třídu metod, které hledají nejlepší odhady na základě minimalizace chyby predikované modelem. V práci bylo dokázáno, že tato třída metod je výjma požadavku na procesní identifikaci velmi dobře uplatnitelná rovněž v úlohách stavové filtrace (rekonstrukce).

Protože většina pokročilých řídicích systémů je modelově orientovaná s optimální vazbou od výstupu, vyvstává požadavek na spolehlivé, přesné, snadno interpretovatelné algoritmy estimace schopné se přizpůsobit časovým změnám v chování procesu. Významným krokem v tomto směru je princip estimace vyhodnocující akumulovanou procesní informaci koncentrovanou v rozšířené kovarianční (ACM) nebo informační matici (AIM). Tento přístup lze chápat jako efektivní reformulaci konvenční metody nejmenších čtverců (LS).

V případě rozšířené identifikace (AI) tato reformulace přirozeně vede na mnohamodelovou paralelní identifikaci. Na základě analýzy metody lze konstatovat, že rozšířená identifikace vždy řeší problém mnohamodelové estimace. Fyzikální význam dílčích modelů se pak ve výsledku odvíjí od vnitřní struktury AIM. Metoda překonává zásadní nedostatek klasické metody LS, totiž v důsledku své konstrukce předchází problémům souvisejícím s přeparametrizováním. Spolu se znalostí modelů všech řádů produkuje jím odpovídající hodnoty kritériálních funkcí, čímž umožňuje stanovit nejvhodnější řád modelu a postihnout případnou změnu ve strukturních parametrech. Jedním z klíčových bodů práce bylo propojit tuto formu identifikace s vhodnou technikou zapomínání, která by dovoľovala sledovat nemodelované změny

ve vývoji parametrů a současně zajišťovala numerickou spolehlivost výpočtu v situacích, kdy je systém nedostatečně vybuzený.

V rámci práce bylo poskytnuto řešení těchto významných problémů:

1. Protože současná schémata směrového zapomínání představují vždy až do-  
datečný zásah upravující obnovu kovarianční matice s absencí návaznosti na  
původní optimalizační problém, byl nalezen nový přístup exaktně rozdělující  
veškerou akumulovanou informaci na informativní a neinformativní část vhod-  
nou formou ortogonální dekompozice. Při tomto dělení bylo respektováno: míra  
akumulované informace v AIM je kontrolována hodnotami kritériálních funkcí  
jednotlivých modelů, při dekompozici nesmí docházet k znehodnocování zís-  
kaných odhadů modelů. Motivací bylo tedy namísto dekompozice přímo AIM  
nalézt dekompozice skalárních kritériálních funkcí v ní obsažených, a tím se-  
parovat AIM na dvě části. Zdokonaleného zapomínání, v tomto případě ex-  
ponenciálního, bylo ve výsledku dosaženo zapomínáním pouze neinformativní  
části dat. Uvedený přístup má dvě varianty lišící se formou rozkladu. Při roz-  
kladu můžeme vyjít ze znalosti rozšířených kovariančních nebo rozšířených  
informačních matic modelů. Metoda si ponechává dobré vlastnosti rozšířené  
mnohamodelové identifikace (numerické aspekty, kompaktnost) a současně za-  
braňuje ztrátě důležité informace, která není nesena v nově přichozích datech.
2. Byl navržen nový postup sestavení stavového filtru, který je chápán jako pro-  
blém nalezení řešení vyhovujícího přeурčené inkonzistentní soustavě lineár-  
ních rovnic. Stavový filtr je pak produktem řešení vzešlého aplikací přístupu  
nejmenších čtverců. Protože vývoj stavů byl popsán zpětným vývojem, opti-  
malizační procedura pak hledá přímo aktuální hodnotu stavu, neboli rekon-  
struuje stav. Výsledný tvar algoritmu byl upraven tak, aby namísto kovarianční  
matice byla šířena rozšířená kovarianční matice (ACM). Odtud pojmenování  
metody rozšířená filtrace metodou nejmenších čtverců. Filtr kompenzuje mož-  
nou nepřesnost odhadu modelu a nemodelovaný drift ve vývoji stavů technikou  
exponenciálního zapomínání. Metoda doplňuje třídu metod minimalizujících  
chybu predikce (PEM) a spolu s rozšířenou identifikací vytváří ucelený koncept  
procesní identifikace a filtrace. Vzhledem ke koncepční jednoduchosti determi-  
nistické formulace problému, která zahrnuje pouze řešení systému lineárních  
rovnic, může být filtr stavů snadno aplikován i na řešení nelineárního problému  
na základě lokální linearizace. Rovněž může být zajímavé sloučit odhad stavů  
a parametrů modelu procesu v jedinou kompaktní proceduru, např. s využitím  
separované metody nejmenších čtverců [42].

Současně s body 1 a 2 byly v práci zodpovězeny všechny otázky vytyčené v cílech

dizertační práce. Přístup rozšířené identifikace a filtrace, jak bylo v práci analyzováno, má ještě jednu nespornou výhodu oproti konvenční formulaci metody nejmenších čtverců. Je-li prováděna odmocninová filtrace ACM, pak dvojnásobné navýšení přesnosti uchované informace se přímo odráží na hodnotách odhadů parametrů a kritériálních funkcí, které jsou odečitatelně zaznamenány v získaných faktorech. Všechny tyto vlastnosti vytvářejí z přístupu rozšířené filtrace a identifikace atraktivní volbu pro adaptivní estimaci v praktických aplikacích.

# Literatura

- [1] ALI, A., HOAGG, J., MOSSBERG, M., aj.: Growing window recursive quadratic optimization with variable regularization. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, 2010, ISSN 0743-1546, s. 496–501.
- [2] BANAVAR, R.: *A game theoretic approach to linear dynamic estimation*. Dizertační práce, University of Texas at Austin, 1992.
- [3] BIERMAN, G.: *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*. Dover Books on Mathematics Series, Dover Publications, 2006, ISBN 9780486449814.
- [4] BOBÁL, V.: *Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů: algoritmy a implementace*. VUTIUM, 1999, ISBN 9788021412996.
- [5] BUCY, R., JOSEPH, P.: *Filtering for stochastic processes with applications to guidance*. Interscience tracts in pure and applied mathematics, Interscience Publishers, 1968.
- [6] CAO, L., SCHWARTZ, H.: A directional forgetting algorithm based on the decomposition of the information matrix. *Automatica*, ročník 36, č. 11, 2000: s. 1725–1731, ISSN 0005-1098.
- [7] DING, F., XIAO, Y.: A finite-data-window least squares algorithm with a forgetting factor for dynamical modeling. *Applied Mathematics and Computation*, ročník 186, č. 1, 2007: s. 184–192, ISSN 0096-3003.
- [8] DOKOUPIL, J., BURLAK, V.: Game Theory Approach to Sliding Window H-infinity Algorithm for Dynamical Modeling Design. In *Proceedings of the 17th conference STUDENT EEICT 2011*, 2011, ISBN 9788021442733, s. 159–164.
- [9] DOKOUPIL, J., BURLAK, V.: Variable Regularized Square Root Recursive Least Square Method. In *Proceedings of 11th IFAC/IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE on PROGRAMMABLE DEVICES and EMBEDDED SYSTEMS PDeS 2012*, 2012, s. 71–75.



- [10] DOKOUPIL, J., GOGOL, F.: Adaptive Estimation of OEMA Model via Variable Regularized Recursive Least Squares Method. In *Proceedings of 11th IFAC/IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE on PROGRAMMABLE DEVICES and EMBEDDED SYSTEMS PDeS 2012*, 2012, s. 76–79.
- [11] DOKOUPIL, J., PIVOŇKA, P.: Adaptive Nonlinear Model Predictive Control Based on Wiener Model. *DAAAM International Scientific Book*, listopad 2011: s. 417–424, ISSN 1726-9687.
- [12] FITZGERALD, R.: Divergence of the Kalman filter. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 16, č. 6, prosinec 1971: s. 736–747, ISSN 0018-9286.
- [13] GEORGE, A., LIU, J. W.: Householder reflections versus givens rotations in sparse orthogonal decomposition. *Linear Algebra and its Applications*, ročník 88–89, č. 0, 1987: s. 223–238, ISSN 0024-3795.
- [14] HAVLENA, V.: Simultaneous parameter tracking and state estimation in a linear system. *Automatica*, ročník 29, č. 4, 1993: s. 1041–1052.
- [15] HOAGG, J., ALI, A., MOSSBERG, M., aj.: Sliding window recursive quadratic optimization with variable regularization. In *American Control Conference (ACC), 2011*, 2011, ISSN 0743-1619, s. 3275–3280.
- [16] HOUSEHOLDER, A.: *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover Books on Mathematics Series, Dover Publications, 2006, ISBN 9780486449722.
- [17] HUYNH, D., DUNNIGAN, M., FINNEY, S.: On-line parameter estimation of an induction machine using a recursive least-squares algorithm with multiple time-varying forgetting factors. In *Power and Energy (PECon), 2010 IEEE International Conference on*, 2010, s. 444–449.
- [18] JIANG, J., ZHANG, Y.: A revisit to block and recursive least squares for parameter estimation. *Computers & Electrical Engineering*, ročník 30, č. 5, 2004: s. 403–416, ISSN 0045-7906.
- [19] JORDAN, T.: Experiments on error growth associated with some linear least-squares procedures. *Mathematics of computation*, ročník 22, 1968: s. 579–588, ISSN 0025-5718.
- [20] KULHAVÝ, R.: Restricted exponential forgetting in real-time identification. *Automatica*, ročník 23, č. 5, 1987: s. 589–600, ISSN 0005-1098.
- [21] KULHAVÝ, R., KRAUS, F.: On duality of regularized exponential and linear forgetting. *Automatica*, ročník 32, č. 10, 1996: s. 1403–1415, ISSN 0005-1098.

- [22] LEWIS, F., XIE, L., POPA, D.: *Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory*. Automation and control engineering, CRC Press, 2007, ISBN 9780849390081.
- [23] LIU, H., HE, Z.: A sliding-exponential window RLS adaptive filtering algorithm: Properties and applications. *Signal Processing*, ročník 45, č. 3, 1995: s. 357–368, ISSN 0165-1684.
- [24] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall Information And System Sciences Series, Prentice Hall PTR, 1999, ISBN 9780136566953.
- [25] LJUNG, L., GUNNARSSON, S.: Adaptation and tracking in system identification—A survey. *Automatica*, ročník 26, č. 1, 1990: s. 7–21, ISSN 0005-1098.
- [26] MILEK, J.: *Stabilized Adaptive Forgetting in Recursive Parameter Estimation*. IfA publication, vdf, Hochschulverlag AG an der ETH, 1995, ISBN 9783728123046.
- [27] NELLES, O.: *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*. Engineering Online Library, Springer, 2001, ISBN 9783540673699.
- [28] NIU, S.: *Augmented UD identification for process control*. Dizertační práce, University of Alberta, Department of chemical engineering, 1994.
- [29] NIU, S., FISHER, D. G.: Information Forgetting Using the Augmented UD Identification Algorithm. In *American Control Conference, 1993*, 1993, s. 796–800.
- [30] NIU, S., FISHER, D. G., XIAO, D.: An augmented UD identification algorithm. *International Journal of Control*, ročník 56, č. 1, 1992: s. 193–211.
- [31] NIU, S. S., FISHER, D. G., LJUNG, L., aj.: A Tutorial On Multiple Model Least-Squares and Augmented UD Identification. 1994.
- [32] O’LEARY, D. P., WHITMAN, P.: Parallel QR factorization by householder and modified Gram-Schmidt algorithms. *Parallel Computing*, ročník 16, č. 1, 1990: s. 99–112, ISSN 0167-8191.
- [33] PARKUM, J. E., POULSEN, N. K., HOLST, J.: Recursive forgetting algorithms. *International Journal of Control*, ročník 55, č. 1, 1992: s. 109–128.

- [34] PETERKA, V.: Control of uncertain processes: Applied theory and algorithms. *Kybernetika*, ročník 22, č. 7, 1986: s. 3–72.
- [35] POTTER, J. E., STERN, R. G.: Statistical filtering of space navigation measurements. In *AIAA Guidance and Control Conference*, 1963.
- [36] ROTH, M., GUSTAFSSON, F.: An efficient implementation of the second order extended Kalman filter. In *Information Fusion (FUSION), 2011 Proceedings of the 14th International Conference on*, 2011, s. 1–6.
- [37] SIMON, D.: *Optimal State Estimation: Kalman, H [infinity] and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006, ISBN 9780471708582.
- [38] SÖDERSTRÖM, T., STOICA, P.: *System identification*. Prentice-Hall international series in systems and control engineering, Prentice Hall, 1989, ISBN 9780138812362.
- [39] STEWART, G. W.: The Effects of Rounding Error on an Algorithm for Down-dating a Cholesky Factorization. *IMA Journal of Applied Mathematics*, ročník 23, č. 2, 1979: s. 203–213.
- [40] THORNTON, C. L., BIERMAN, G. J.: Gram-Schmidt algorithms for covariance propagation. In *Decision and Control including the 14th Symposium on Adaptive Processes, 1975 IEEE Conference on*, ročník 14, 1975, s. 489–498.
- [41] VAHIDI, A., STEFANOPOULOU, A., PENG, H.: Recursive least squares with forgetting for online estimation of vehicle mass and road grade: theory and experiments. *Vehicle System Dynamics*, ročník 43, č. 1, 2005: s. 31–55.
- [42] VERDULT, V., VERHAEGEN, M., CHOU, C.: Identification of MIMO bilinear state space models using separable least squares. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, ročník 2, 1999, s. 838–842.
- [43] VERHAEGEN, M., VERDULT, V.: *Filtering and System Identification: A Least Squares Approach*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 9780521875127.
- [44] ZHA, H.: Restricted Singular Value Decomposition of Matrix Triples. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, ročník 12, 1991: s. 172–194.

# Seznam symbolů, veličin a zkratek

$\theta_k$	skutečné hodnoty parametrů nebo stavů v okamžiku $k$
$\hat{\theta}_k$	odhady parametrů nebo stavů
$\tilde{\theta}_k^{(i)}$	odhad parametrů nebo stavů modelu $i$ -tého řádu
$\hat{\theta}_{i,k}, \hat{\theta}_{i(k)}$	$i$ -tý vstup vektoru odhadovaných parametrů nebo stavů
$\mathcal{U}_k$	horní monická trojúhelníková matice parametrů
$\mathcal{D}_k$	diagonální matice kritériálních funkcí
$\mathcal{M}_k$	rozšířená informační matice
$\mathcal{C}_k$	rozšířená kovarianční matice
$R_k$	informační matice
$P_k$	kovarianční matice
$\varphi_k$	rozšířený regresní vektor pozorování (dat)
$\Phi_k$	rozšířená regresní matice pozorování (dat)
$h_k$	regresní vektor pozorování (dat)
$H_k$	regresní matice pozorování (dat)
$v_k$	šum procesu
$V_k$	kovarianční matice šumu procesu
$e_k$	šum měření
$\sigma_e^2$	rozptyl šumu výstupu
$E_k$	vektor tvořený sekvencí šumů výstupu

$\lambda_e$	faktor exponenciálního zapomínání
$\Lambda_k$	matice exponenciálního zapomínání
$Q_k$	váhová matice obsahující na hlavní diagonále faktory exponenciálního zapomínání v požadovaných mocninách
$\mathcal{V}(\cdot)$	kriteriální funkce
$\mathbb{R}$	soubor reálných hodnot
$\mathbb{R}^{m \times n}$	soubor matic reálných hodnot o rozměru $m \times n$
$\in$	spadá do
$\approx$	přibližně je rovno
$X^T$	transpozice matice $X$
$\kappa(X)$	kondiční číslo matice $X$
$\sigma(X)$	singulární čísla matice $X$
$\lambda(X)$	vlastní čísla matice $X$
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$	matice o rozměru $n \times n$ , jejíž $i$ -tý diagonální vstup je $x_i$
$\text{rank}(X)$	hodnost matice $X$
$\text{tr}(X)$	stopa matice $X$
$\arg \min_x \mathcal{V}(x)$	argument minimalizující funkci $\mathcal{V}(x)$
$\lim$	limita
$\min$	minimum
$\max$	maximum
$\ \cdot\ _2^2$	Euklidovská norma
$\ \cdot\ _Q^2$	váhaná Euklidovská norma maticí $Q$
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	statisticky očekávaná hodnota
$x \sim \mathcal{N}(m_x; \sigma_x^2)$	normální Gaussovo rozdělení veličiny $x$ se střední hodnotou $m_x$ a rozptylem $\sigma_x^2$
ACM	rozšířená kovarianční matice

AF	rozšířená filtrace
AI	rozšířená identifikace
AIM	rozšířená informační matice
ALDI	rozšířená identifikace využívající $LDL^T$ produkty rozšířené informační matice
ARARMAX	Auto-Regressive Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input
ARMAX	Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input
ARX	Auto-Regressive with eXogenous input
ASRI	rozšířená identifikace využívající Choleského trojúhelník kovarianční nebo informační matice
AUDI	rozšířená identifikace využívající $UDU^T$ produkty rozšířené kovarianční matice
DF	směrové zapomínání
EF	exponenciální zapomínání
KF	Kalmanův filtr
LD-RLS	rekurzivní metoda nejmenších čtverců s LD filtrací (sdružené) kovarianční matice
LF	lineární zapomínání
LS	dávková metoda nejmenších čtverců
MEF	mnohonásobné exponenciální zapomínání
MGS	modifikovaná Gramova-Schmidtova ortogonalizace
MMLS	mnohamodelová metoda nejmenších čtverců
PEM	metoda predikčních chyb
RF	omezené zapomínání
RLS	rekurzivní metoda nejmenších čtverců

SR-RLS	rekurzivní metoda nejmenších čtverců s odmocninovou filtrací (sdružené) kovarianční matice
SW	technika klouzavého datového okna
WGS	vážená Gramova-Schmidtova ortogonalizace